Nº d'Ordre au C.N.R.S.
A.O. 7441

THÈSE

PRESENTEE

A L'UNIVERSITE DE PROVENCE

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES MATHEMATIQUES

(MECANIQUE)

PAR

JEAN-PIERRE GUIBERGIA

ETUDE DU COMPORTEMENT DE LA COUCHE LIMITE LAMINAIRE EN PRESENCE D'UN GRADIENT DE PRESSION NEGATIF OU POSITIF DANS L'ECOULEMENT HYPERSONIQUE AUTOUR D'OBSTACLES

soutenue le 10 Juillet 1972, devant la Commission d'Examen :

Jury

M.J.VALENSI	Président
M.P.CASAL	Examinateurs
Mlle C.CLARION	
M.E.BROCHER	
M.H.AHLSTROM	Membre de l'Academie des Sciences
M.E.BRUN	Invité

Nº d'Ordre au C.N.R.S.
A.O. 7441

THÈSE

PRESENTEE

A L'UNIVERSITE DE PROVENCE

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES MATHEMATIQUES

(MECANIQUE)

PAR

JEAN-PIERRE GUIBERGIA

Etude du comportement de la couche limite laminaire en présence d'un gradient de pression négatif ou positif dans l'écoulement hypersonique autour d'obstacles

soutenue le Juillet 1972, devant la Commission d'Examen :

Jury	M.J.VALENSI	Président
	M.P.CASAL	
	Mlle C.CLARION	Examinateurs
	M.E.BROCHER	
	M.H.AHLSTROM	
	M.E.BRUN	Membre de l'Academie des Scienc Invité

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Université de Provence

U.E.R. Scientifiques

Président : F. BOREL

Secrétaire général : C. MOYNAULT

PROFESSEURS

MM. J. VALENSI	Mécanique expérimentale des fluides
P. ROUARD	Physique générale
P. DESNUELLE	Chimie biologique
M. MERIGOUX	Physique industrielle
C. FEHRENBACH	Astronomie
A. FAVRE	Mécanique de l'atmosphère et météorologie
A. GUILLEMONAT	Chimie industrielle
G. CAPPENI	Chimie
Y. DOUCET	Physique
JM. SOURIAU	Méthodes mathématiques de la physique
J. METZGER	Chimie
L. FOURES	Mathématiques
D. MALE	Physique
C. BODIOU	Mathématiques appliquées
M. NAUDET	Chimie des corps gras
P. BOUSQUET	Physique
P. PESTEIL	Physique
P. CASAL	Mécanique rationnelle et appliquée
G. GOUVERNET	Géologie appliquée
A. VISCONTI	Physique théorique
A. BLANCHARD	Mathématiques générales
M. DUSSARDIER	Physiologie animale
P. QUEZEL	Botanique
E. CRAUSSE	Physique (Avignon
A. JULG	Chimie théorique
S. TAXY (Mme)	Géologie historique
F. TESSIER	Géologie générale

.../...

ML. FURNESTIN (Mme)	Biologie animale
M. BERTRAND	Chimie
J. TROMPETTE	Physique
M. LAFFITTE	Chimie
R. FRAISSE	Mathématiques
C. BLANCHARD (Mme)	Mathématiques
R. NEGRE	Biologie végétale
R. COULON	Physique
R. KERN	Minéralogie
L. SIDERIADES	Physique
JM. SURZUR	Chimie organique
H. CHANTREL	Physique de l'espace
J. SOUGY	Géologie
J. HERVE	Electronique
H. BODOT	Chimie
J. CHOUTEAU	Physiologie animale
R. PHILIP	Physique
L. CAPELLA	Minéralogie
P. BILLARD	Mathématiques
M. BONNEAU	Mathématiques
JC. TRAYNARD	Chimie industrielle
C. CLARION (Mlle)	Mécanique des fluides
A. PONS	Botanique
A. GIRARDIE	Zoologie
JC. MAIRE	Chimie
M. SIMON	Physiologie animale
J. MENDELBROJT	Physique
JP. DAVID	Physique
M. BIZOUARD	Physique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

R. AMAR	Zoologie
L. DEVEZE	Biologie marine
F. BOREL	Technique mathématique de la physique
R. CHANDEBOIS (Mlle)	Biologie animale
H. GUENOCHE	Mathématiques appliquées
F. PECAUT (Mme)	Mathématiques (Avignon)
J. HENNEQUIN	Electronique
S. GUEIRARD (Mlle)	Pétrographie
C. FEUGEAS	Chimie
J. CABANE	Chimie
G. RASIGNI	Physique
S. COMBET	Chimie
R. GARRON	Physique expérimentale
M. CADILHAC	Physique
B. WAEGELL	Chimie
G. MARCHIS-MOUREN	Chimie biologique
F. HALBWACHS	Physique (Avignon)
R. PETIT	Physique
M. HUGON	Psycho-physiologie
M. PICHENOT (Mlle)	Biologie végétale
M. GILLET	Physique
JP. ROGGERO	Chimie (Avignon)

.../...

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547004_0016

A MON MAITRE,

Monsieur le Professeur J. Valensi

Hommage respectueux et reconnaissant

A MA FEMME,

A MES FILLES,

AVANT - PROPOS

L'ensemble des travaux présentés dans ce mémoire, a été exécuté à l'Institut de Mécanique des Fluides de Marseille dans le cadre des recherches effectuées depuis plusieurs années, sur les écoulements à nombre de Mach élevé et à haute enthalpie génératrice sous la direction du Professeur J. Valensi, Directeur de l'Institut.

Je tiens à exprimer à mon Maître, Jacques Valensi, ma reconnaissance et mon respectueux attachement, pour l'aide constante et les précieux conseils qu'il m'a prodigués, au cours des recherches qu'il a bien voulu me confier.

Je remercie, Monsieur Pierre Casal, Professeur à l'Université de Provence, qui a bien voulu être membre du jury.

Je remercie Mademoiselle Claire Clarion, Professeur à l'Université de Provence, pour son enseignement en Mécanique des Fluides et pour les encouragements qu'elle m'a dispensés.

Je suis très sensible à l'honneur qu'il me fait en acceptant d'être membre du jury, et remercie très vivement Monsieur Edmond Brun, Membre de l'Académie des Sciences, de bien vouloir s'intéresser à mon travail.

Je remercie également Monsieur Eric Brocher, Maître de Recherche au Centre National de la Recherche Scientifique, qui a bien voulu témoigner tout l'intérêt qu'il portait à l'accomplissement de cette recherche et qui m'a aidé par ses précieux conseils.

Je suis aussi sensible à l'honneur que me fait M. Harlow Ahlstrom, Professeur Associé de l'Université de Provence

en acceptant d'être membre du jury.

Que Monsieur René Marmey, Ingénieur au C.N.R.S. qui a participé à tous les travaux présentés dans ce mémoire, trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Je désire également exprimer mes remerciements à Madame Fauchas qui a réalisé la programmation des calculs utilisés dans cette étude, ainsi qu'à Monsieur Pierre Issartier, Ingénieur au C.N.R.S. à qui je dois bien des moyens de mesure.

Que mes collègues du laboratoire T.C.3., Jean-Paul Ardissone, Françis Rodriguez et Jean Gudet et du laboratoire de l'Hypersonique Robert Mariani, sachent que je leur suis reconnaissant de leur aide précieuse et dévouée.

Je tiens enfin à exprimer ma reconnaissance à Madame Bachasson et Monsieur Gabriel Soleillant qui m'ont permis l'édition de ce mémoire.

TABLE DES MATIERES

pages

1. INTRODUCTION

2. MOYENS D'ESSAIS 5
   2.1. Soufflerie à choc réfléchi TC 3 "
      2.1.1. Description
      2.1.2. Conditions des essais. Domaine de simulation
      2.1.3. Durée des rafales
   2.2. Soufflerie hypersonique à rafales 10

3. INSTRUMENTATION. METHODES EXPERIMENTALES 12
   3.1. Soufflerie à choc réfléchi TC 3 "
      3.1.1. Mesure des pressions
      3.1.2. Mesure du transfert de chaleur
   3.2. Soufflerie hypersonique à rafales 20
      3.2.1. Mesure des pressions
      3.2.2. Mesure du transfert de chaleur

4. ECOULEMENT EN PRESENCE D'UN GRADIENT DE PRESSION NEGATIF 22
   4.1. Ecoulement conique dans le divergent de la tuyère "
   4.2. Calcul de la couche limite à la paroi du divergent 26
      4.2.1. Couche limite laminaire
      4.2.2. Conditions aux limites. Ecoulement à la frontière extérieure de la couche limite
      4.2.3. Résultats théoriques et expérimentaux
      4.2.4. Couche limite turbulente
      4.2.5. Etalonnage de la veine d'essais

5. ECOULEMENT EN PRESENCE D'UN GRADIENT DE PRESSION POSITIF 37

5.1. Etude théorique de l'écoulement non visqueux "

5.1.1. Ecoulement autour de la pointe conique

5.1.2. Ecoulement autour d'un corps à méridienne circulaire (méthode des caractéristiques)

5.1.3. Approximation de Newton-Buseman

5.1.4. Approximation du cône tangent

5.2. Etude théorique de l'écoulement visqueux 63

5.2.1. Equations générales de Navier-Stokes

5.2.2. Application à l'écoulement autour du corps de révolution à méridienne concave

5.2.3. Estimation des ordres de grandeur

5.2.4. Equations de la couche limite

5.2.5. Recherche de solutions de similitude

5.2.6. Intégration numérique des équations transformées de la couche limite (Cas des corps à méridienne circulaire)

5.2.7. Résultats théoriques

5.3. Résultats expérimentaux et comparaison avec la théorie

5.3.1. Répartition des pressions

5.3.2. Répartition du flux de chaleur

CONCLUSION 94

BIBLIOGRAPHIE 98

ANNEXES

I. Solutions des équations de la couche limite laminaire

II. Calcul de β^{*} au raccordement cône-jupe

III. Relation de Newton-Buseman

NOTATIONS

A : section droite

c : capacité calorifique

C_p : chaleur spécifique à pression constante

C_v : " " à volume constant

$C = \frac{\rho\mu}{\rho_e \mu_e}$

E : tension électrique

e_v : énergie de vibration

$f = \frac{\psi}{\sqrt{2\xi}}$

$G = \frac{H}{H_e}$

$g = \frac{h}{H_e}$

H : enthalpie totale

h : enthalpie

I : intensité électrique

k : conductivité thermique

K : constante du pont de Wheatstone

M : nombre de Mach

m : masse

Nu : $Q_w \, C_{p_{eo}} \, \frac{R}{(h_{eo}-h_w)\, K_{eo}}$: nombre de Nusselt

p : pression

Q,q : flux de chaleur

P_r : nombre de Prandtl

$\mathcal{R}$: constante des gaz parfaits

R : rayon de courbure

$\mathcal{R}_e$: nombre de Reynolds par cm $\frac{\rho_e u_e}{\mu_e}$

R_o : $\rho_{eo}(h_{eo})^{1/2} \frac{R}{\mu_{eo}}$

S : entropie

s : abscisse curviligne

T : température

t : temps $t_w = \frac{H_w}{H_e}$

u : vitesse longitudinale

v : vitesse transversale

w : angle du choc

x : coordonnée longitudinale parallèle à la direction infinie amont

y : coordonnée transversale perpendiculaire à la direction infinie amont

α
β : coordonnées curvilignes triorthogonales dans repère mobile
γ

$\alpha = \arcsin \frac{1}{M}$

γ : $\frac{C_p}{C_v}$

$\theta = \frac{H - H_w}{H_e - H_w}$

différenciés dans le texte

$\theta = \frac{T}{T_e}$

$\xi = \int_o^x \rho_w \mu_w u_e r^2 dx$

différenciés dans le texte

$\xi = \int_o^\alpha \rho_e \mu_e u_e r^2 R \, d\alpha$

$\eta = \frac{u_e r}{\sqrt{2\xi}} \int \rho dy$

ρ : densité

μ : viscosité

$$\beta = \frac{2\xi}{u_e} \frac{du_e}{d\xi}$$

$$\beta^* = \frac{T_{eo}}{T_e} \beta$$

Indices

a : Mouvements de translation et rotation de la molécule supposée en équilibre

e : écoulement extérieur à la couche limite

c : cône

f : écoulement figé du point de vue vibratoire

ℓ : limite

r : référence

s : source

v : vibration

w : conditions à la paroi

O : conditions d'arrêt

5 : état des gaz à l'aval du choc réfléchi

1. INTRODUCTION

La recherche dont il est rendu compte ici, a eu pour but principal l'étude expérimentale et la prévision du comportement de la couche limite laminaire à la surface d'un obstacle lorsque l'écoulement relatif non perturbé est hypersonique et que la répartition de pression à la surface de l'obstacle est telle que la couche limite se trouve en présence d'un gradient de pression soit négatif (gradient favorable), soit positif (gradient défavorable). La recherche a été effectuée pour diverses valeurs de l'enthalpie de l'écoulement général, en particulier pour des valeurs élevées (température d'arrêt comprise entre 4000°K et 6000°K) et pour des valeurs relativement faibles du nombre de Reynolds unitaire rapporté à la température et à la pression de l'écoulement non perturbé ($Re_\infty = O(10^4)$) conditions qui se présentent dans la rentrée des engins dans la haute atmosphère (cas des corps de rentrée), ou encore dans le vol des engins hypersoniques (prises d'air de stato-réacteurs).

L'étude expérimentale a été réalisée en utilisant deux moyens d'essais différents :

Soufflerie à choc réfléchi (écoulement à haute enthalpie) T_o = 4000 et 5200°K, p_o = 184 et 120 bars M = 10 ; gaz en écoulement (azote sec. Re_∞ /cm = 9300 et 3600)

Soufflerie hypersonique froide T_o = 400° à 600°K, p_o = 5 à 25 bars ; gaz en écoulement : Air sec Re_∞/cm = 25.000 à 780.000 M = 4 à 8.

L'étude théorique et expérimentale de l'écoulement à

travers la tuyère dans le régime transitoire d'amorçage de la tuyère et une fois le régime établi a offert la possibilité d'examiner dans un cas concret le comportement de la couche limite hypersonique en présence d'un gradient de pression négatif. Les calculs théoriques ont été effectués en tenant compte des effets de gaz réels, soit, dans le cas présent, de l'excitation du degré de liberté de vibration des molécules du gaz en écoulement. Ils ont permis de retrouver avec précision les résultats des mesures de densité de flux de chaleur convectée à la paroi de la tuyère tant que l'écoulement dans la couche limite demeure laminaire. Cette étude fait l'objet du chapitre 4 : après avoir défini l'écoulement isoénergétique sphérique dans le divergent tronconique de la tuyère, ce qui implique que des corrections doivent être apportées aux résultats des mesures (pression et densité de flux de chaleur) réalisées à la surface des modèles de manière à rendre ces résultats conformes à ceux qu'on obtiendrait si l'écoulement non perturbé était uniforme, le calcul de la couche limite développée sur les parois du divergent a été réalisé par la méthode de similitude locale et a conduit à des résultats en bon accord avec l'expérience à condition que l'on procède à toutes les corrections nécessaires : corrections dues à la présence de la couche limite sur les parois ainsi que celles dues à l'état de non-équilibre thermodynamique du gaz dans le noyau sain de l'écoulement. Dans le cas présent d'ailleurs, le calcul montre que ces dernières corrections sont de l'ordre des erreurs d'expérience.

L'analyse du comportement de la couche limite laminaire

en présence d'un gradient de pression positif exposé au chapitre 5 a été réalisée dans le cas concret où le gradient de pression positif est imposé par une paroi concave d'un modèle dont la géométrie est connue de telle sorte que les grandeurs mécaniques de l'écoulement non visqueux peuvent être calculées. La connaissance des répartitions des paramètres extérieurs à la couche limite permet alors de choisir l'ordre des approximations faites dans les équations générales de Navier-Stokes. Cette approche du calcul de la couche limite en présence d'un gradient de pression positif diffère de celle adoptée jusqu'ici par les auteurs (3 à 8) sur le même sujet, qui fixent arbitrairement les valeurs des paramètres de l'écoulement extérieur comme s'ils étaient indépendants et qui sont conduits à effectuer des approximations dans les équations de Navier-Stokes qui peuvent tomber en défaut dans des cas particuliers.

Une application directe de cette analyse se trouve dans l'étude de prises d'air munies de corps centraux à profils évolutifs produisant une compression par une infinité de chocs d'intensité très faibles de telle sorte que cette compression puisse être quasi-isentropique. Ces profils évolutifs ont été d'abord proposés dans le cas de l'écoulement plan par K. Oswatitsch et repris par A. Ferri dans les cas des écoulements à symétrie axiale pour constituer le noyau central d'entrées d'air de stato-réacteurs d'avions hypersoniques.

L'expérience montre que pour un nombre de Mach de vol supérieur ou égal à 2 les profils évolutifs de corps central

ont une efficacité supérieure à celle des prises du type Pitot ou à la prise d'air bidimensionnelle "à proue émergente multidièdre" qui permet de remplacer le choc oblique de proue, d'une prise d'air bidimensionnelle à corps central émergent de section droite en forme de dièdre, par plusieurs chocs successifs. Une courbe de la figure 1[9] est relative à une prise d'air dont le tracé est tel que toutes les lignes de Mach issues de la génératrice concave convergent sur la lèvre de carène : on voit le gain d'efficacité qu'on peut attendre de telles prises d'air. Le comportement de ces prises d'air, tel que le prévoit la théorie du fluide parfait, peut être modifié plus ou moins profondément par la présence de la couche limite. Si l'on se réferre aux résultats des travaux des auteurs cités ci-dessus la couche limite peut décoller ce qui provoque alors d'une part une diminution du débit d'air et par là du débit du combustible, ce qui entraine une perte de poussée, d'autre part des bruits de manches observés en vol : vibrations qui peuvent être néfastes pour peu que la structure entre en résonance.

Les corps considérés dans la présente recherche comportent en général une partie avant conique de longueur variable à laquelle est raccordée tangentiellement une jupe dont la demi - méridienne a été choisie en arc de cercle. On a pris pour paramètre de forme le demi-angle au sommet σ de la pointe et le rapport s_j/R de la longueur des génératrices de la partie conique au rayon de courbure de la jupe. Lorsque $s_j/R = 0$ la méridienne est évidemment constituée de deux arcs de cercle symétriques.

2. MOYENS D'ESSAIS

2.1. Soufflerie à choc réfléchi T.C.3.

2.1.1. Description

La soufflerie à choc TC 3 a été réalisée à l'I.M.F.M. avec l'appui matériel de la Direction Technique des Constructions Aéronautiques.

Caractéristiques géométriques :

Chambre haute pression : longueur 1,50 m
diamètre intérieur : 52 mm

Chambre de basse pression : longueur 9,00 m
diamètre intérieur : 51,76 mm.

Tuyère à divergent tronconique : angle d'ouverture 9,44°
Chambre d'expériences : diamètre 700 mm, longueur 1,70 m
Réservoir d'amortissement : diamètre 1,30 m, hauteur 3,30 m environ.

La communication entre la chambre haute pression et la chambre basse pression est empêchée à l'instant initial par un dispositif à double membrane métallique tandis que la communication entre la chambre d'expérience et le réservoir d'amortissement est empêchée à l'instant initial par une membrane plastique en Terphase.

La tuyère (Pl.2) est réunie à la chambre de basse pression par une membrane souple en téflon qui assume l'étanchéité entre l'atmosphère et le vide de la chambre d'expériences (Pl.3) ($p = 10^{-3}$ Torr) et transmet que très peu les vibrations mécaniques du tube à la chambre d'expériences.

2.1.2. Conditions des essais. Domaine de simulation

Les conditions des essais sont les suivantes :

- gaz moteur dans la chambre de haute pression : hydrogène
  $p = 600$ bars
- gaz d'essais dans la chambre de basse pression : Azote
  $p = 0,58$ bar

En gaz parfait dans le cas d'une formation instantanée du choc incident à la rupture des membranes métalliques, le rapport des pressions des gaz moteur et d'essais est voisin de 320 pour obtenir un nombre de Mach de l'onde de choc incidente égal à 6, valeur correspondant à l'adaptation de la surface de séparation des deux gaz : en réalité compte tenu du facteur de compressibilité de l'hydrogène, de la formation non instantanée du choc incident due au temps d'ouverture des membranes et de l'atténuation de choc dans sa propagation le long du tube basse pression, il est nécessaire, pour obtenir un nombre de Mach de l'onde de choc égal à 6 à l'extrémité aval du tube basse pression, de choisir un rapport de pression voisin de 1000. Les conditions d'essais de la soufflerie sont alors les suivantes :

Grandeur réservoir $\frac{H_o}{RT_r} = 57$, $T_r = 273°K$, $p_o = 184$ bars,
$T_o = 4020°K$

Ecoulement en sortie de tuyère $M_\infty = 10$, $T_\infty = 210°K$, $p_\infty = 4,4.10^{-3}$ bars
$Re_\infty/cm = 8000$, $U_\infty = 2,8$ km/s

Cet écoulement simule le vol d'un planeur hypersonique à une altitude voisine de 30 km.

2.1.3. Durée des rafales

Le temps de rafale idéal est égal au temps nécessaire à l'écoulement, à travers le col de la tuyère, de la totalité du gaz d'essais en supposant que ce gaz d'essais comprimé et réchauffé par l'onde de choc réfléchie n'a été perturbé par aucune onde venue de l'amont du tube basse pression et qu'il n'y a aucune perte de chaleur par les parois. Dans les conditions d'essais citées ci-dessus, ce temps idéal est de l'ordre de 20 m&s.

En réalité plusieurs causes importantes viennent diminuer grandement ce temps idéal.

2.1.3.1. Limitation

L'instabilité de la surface de séparation des gaz moteur et d'essais favorise l'échange des gaz au niveau de cette surface pendant toute sa propagation le long du tube B.P. et de ce fait diminue la quantité de gaz d'essais disponible pour la soufflerie.

Le choc réfléchi à l'extrémité aval du tube B.P. rencontre la couche limite qui s'était développée dans l'écoulement au contact de la paroi ; cette interaction a été étudiée notamment par Mark et Davies[10][11] : la partie du gaz d'essais qui traverse les deux chocs obliques formés par l'interaction du choc réfléchi et de la couche limite ne possède pas la même vitesse et la même entropie que la partie du gaz qui traverse la région centrale plane du choc réfléchie ; ce phénomène d'écoulement latéral débute au même instant que la réflexion du choc primaire

à l'extrémité aval du tube B.P. mais tant que le choc réfléchi n'atteint pas la surface de séparation cet écoulement est constitué par de l'azote chaud. Par contre aussitôt que se produit l'interaction choc réfléchi - surface de séparation, l'écoulement latéral est un écoulement d'hydrogène froid qui vient modifier fortement la température du gaz comprimé par le choc réfléchi. De plus lors de cette interaction les conditions d'adaptation de la surface de séparation non pas entre l'azote chaud et l'hydrogène froid mais entre ce même azote et un mélange hydrogène - azote ne sont plus parfaitement réalisée et une onde réfléchie vient perturber le gaz d'essais.

Compte tenu de toutes ces limitations, les conditions de réservoir de la tuyère restent constantes pendant environ 2 m&s.

2.1.3.2. Amorçage de la tuyère

Le temps de rafale défini plus haut ne constitue pas le temps utile correspondant à la durée de l'écoulement stationnaire établi en sortie de tuyère ; il y a lieu de soustraire l'intervalle de temps correspondant à l'amorçage de la tuyère.

Les phénomènes d'amorçage d'une tuyère convergente - divergente ont fait l'objet de plusieurs études à l'I.M.F.M. (15)(16)(17). La comparaison des résultats de l'expérience avec ceux déduits d'une analyse théorique effectuée selon une méthode aux différences finies étudiée et programmée à l'O.N.E.R.A. a mis en évidence le processus d'amorçage suivant dans le cas de nos essais (P1.4) : une onde de choc primaire suivie d'une

onde de choc secondaire faisant face à gauche, d'une détente instationnaire et de la détente stationnaire. On peut constater sur la figure 5 que l'intensité de la détente instationnaire et celle du choc primaire sont des fonctions décroissantes de l'abscisse.

La figure 6 rassemble dans le plan x,t les résultats expérimentaux obtenus concernant la trajectoire du choc primaire et de la caractéristique limite $u_\infty - a_\infty$ au-delà de laquelle l'écoulement est stationnaire, pour différentes valeurs du rapport p_5/p_i. On a porté de plus pour la comparaison la trajectoire de la caractéristique limite déduite de l'expression[20] :

$$t_x = \frac{dx}{u_\infty - a_\infty} = \frac{0,76\ r^*}{a_5}\ M^{1/2}\ (1 - \frac{1}{M_\infty}) + \frac{1}{15}\ (M_\infty^{3/2} - 1) + \frac{1}{25}\ (M_\infty^{5/2} - 1)$$

Les notations sont les suivantes : a_5 désigne la célérité du son dans le gaz au repos à l'amont de la tuyère, r^* le rayon du col, $M_\infty = \frac{u_\infty}{a_\infty}$ (nombre de Mach de l'écoulement stationnaire à l'abscisse x). On voit que les caractéristiques limites expérimentales peuvent se déduire de la caractéristique calculée, par une translation parallèle à l'axe du temps.

Les trajectoires des chocs primaire et secondaire sont représentées dans la figure 7 ainsi que la caractéristique limite, dans le cas où $\frac{p_5}{p_i} = 5.10^5$. L'expérience est en bon accord avec la théorie ONERA en ce qui concerne les trajectoires des chocs primaire et secondaire. La caractéristique limite réelle, sensiblement parallèle à la caractéristique calculée, est ici encore décalée par rapport à celle-ci dans le sens des temps croissants : le calcul suppose en effet que le raccord entre le

col de la tuyère et le divergent est effectué à angle vif, alors qu'il est progressif, ce qui a pour effet de diminuer la célérité de la caractéristique limite ($u_\infty - a_\infty$).

Le temps d'amorçage égal à l'ordonnée à l'origine de la trajectoire d'une particule se déplaçant dans la tuyère à la vitesse u(x) et arrivant en sortie de tuyère au même instant que la caractéristique $u_\infty - a_\infty$ s'exprime par la relation suivante :

$$t_a = t_\ell - \int_0^\ell \frac{dx}{u_\infty}$$

où T_ℓ est le temps de parcours de la caractéristique limite $u_\infty - a_\infty$ et

$$\frac{dx}{u} = \frac{0,76\ r^*}{a_5} \left[\frac{4}{5} (M^{1/2}-1) + \frac{1}{25} (M^{5/2} -1) + \frac{1}{2} (M^{-3/2} - 1) \right]$$

le temps d'amorçage est une fonction décroissante du rapport p_5/p_i ; dans les conditions d'essais ($p_5/p_i = 1,4.10^8$) ce temps est égal à 300 µs.

On voit donc que la durée de la rafale utile dans les conditions des essais énoncés au paragraphe 1.2 est environ de 1,7 m .

2.2. Soufflerie hypersonique : description et conditions des essais.

La soufflerie à rafales fonctionne par la détente d'air sec renfermé dans un réservoir de 13 m^3 sous une pression de 36 bars. Ce réservoir alimente par l'intermédiaire d'un détendeur un réchauffeur fonctionnant par accumulation de chaleur dans un nid d'abeilles en acier inoxydable. La stabilité de

la pression est de 0,1 %, celle de la température de 0,5 %.

A l'aval de la tuyère à profil évolutif et col interchangeable du type de celui utilisé à l'O.N.E.R.A., un réservoir à vide permet d'obtenir le rapport de pression nécessaire à l'amorçage de la tuyère, et peut assurer à M = 7 des rafales d'une minute. Le fonctionnement de la soufflerie est entièrement automatisé, et un programmeur permet de régler l'instant de chaque opération. La chambre d'expériences présente une section circulaire de 20 cm de diamètre. Les tuyères disponibles permettent de réaliser des nombres de Mach compris entre 4 et 8 ; la pression génératrice peut varier de 10 à 31 bars, la température génératrice peut être portée jusqu'à 700°K.

3. INSTRUMENTATION. METHODES EXPERIMENTALES

3.1. Soufflerie à choc réfléchi T.C.3.

3.1.1. Mesures des pressions

3.1.1.1. Description des capteurs

Les difficultés des mesures résultent de la sévérité des conditions, en particulier :

- de la faible valeur absolue des pressions à mesurer qui sont de l'ordre de quelques mm de mercure.
- de l'importance des vibrations mécaniques, causées principalement par la réflexion du choc primaire à l'extrémité aval du tube basse pression, vibrations qui se communiquent à la tuyère liée rigidement au tube.
- de la nécessité de miniaturiser les capteurs de mesure.
- des phénomènes aérodynamiques précédent l'établissement du régime stationnaire d'écoulement dans la tuyère.

De telles conditions imposent l'utilisation de jauges piézoélectriques[22], dont le montage est le suivant (Pl.3).

La pastille est mince (1 mm), de façon à présenter dans le mode fondamental de vibration longitudinal, une fréquence propre élevée (2,5 MHz). Elle est collée sans contrainte latérale sur une tige de laiton relativement courte, de masse 20 fois plus grande, enveloppée dans un fourreau de Téflon, lui-même serti dans un cylindre métallique. Les vibrations longitudinales de la pastille sont alors amorties rapidement et sont peu détectées par la chaîne électronique.

La nature de la céramique (titanate de baryum) assure, en dépit de sa faible épaisseur et de la capacité relativement grande de la pastille, une sensibilité amplement suffisante (1 mV/mm Hg), mais eu égard à la valeur insuffisamment élevée de sa résistance d'isolement, la pastille ne permet que des mesures en régime transitoire et exige un étalonnage dynamique. La constante de temps de l'ensemble est de l'ordre de 4.10^{-6}s.

3.1.1.2. Mesure de pression à la paroi des modèles

Le montage des capteurs à l'intérieur des modèles est réalisé de la façon suivante : le modèle est placé sur un support solidaire de la chambre d'essais par l'intermédiaire d'une semelle en plomb. Il est constitué par une enveloppe de laiton dans laquelle est coulée une âme en plomb comportant des cavités cylindriques à l'intérieur desquelles sont placés les capteurs. Le bloc cylindrique des capteurs s'appuie sur les parois de la cavité par l'intermédiaire de joints toriques souples assurant l'étanchéité. La liaison avec la surface qui comporte aux endroits désirés un orifice de faible diamètre, se fait par l'intermédiaire d'un tube qui assure ainsi la communication entre l'orifice et la face libre de la pastille.

Un tel montage assure d'une part l'isolation mécanique indispensable et d'autre part l'impédance acoustique nécessaire pour empêcher la transmission à la pastille des sollicitations résultant des phénomènes aérodynamiques transitoires évoqués plus haut.

3.1.1.3. Mesure de pression à la paroi du divergent de la tuyère

La tuyère subissant des vibrations mécaniques d'une façon beaucoup plus intense que la chambre d'expériences un montage légèrement différent a du être adopté.

Les capteurs sont placés dans des fourreaux métalliques fixés sur des supports indépendants de la tuyère, l'étanchéité est réalisée de la même façon par des joints toriques, la communication entre l'orifice situé à la paroi de la tuyère et la face libre de la pastille étant assurée dans ce cas à l'aide d'un tube souple.

Les mesures de pression pendant l'amorçage instationnaire de la tuyère sont effectuées avec des capteurs affleurant la surface de la paroi et maintenus à l'aide de supports identiques à ceux décrits ci-dessus(Pl.9) ; la pastille est alors directement soumise aux variations brutales de pression et peut détecter ainsi le passage des ondes instationnaires et l'instant où l'écoulement devient stationnaire.

3.1.1.4. Etalonnage des capteurs de pression

Les capteurs sont étalonnés dynamiquement à l'aide d'un tube à choc auxiliaire, ils sont placés soit en paroi, pour des échelons de pression inférieurs ou égaux à 100 mm Hg, soit à l'extrémité fermée du tube, pour des pressions allant jusqu'à une atmosphère. Les nombres de Mach de l'onde de choc incidente sont compris entre 2 et 3, et sont mesurés par des jauges thermométriques à film mince de platine.

La planche 10 montre comment les signaux sont modifiés lorsque sont placés successivement devant la face libre de la pastille deux diaphragmes différant par le diamètre de l'orifice, donc présentant des impédances acoustiques différentes ; sur la même planche le graphique montre l'influence du diamètre de l'orifice de prise de pression sur le temps de réponse dont l'expression théorique approximative s'écrit :

$$\tau = \frac{8\ \mu\ VL}{R^4\ p_1}$$

où μ et p_1 représentent respectivement la viscosité et la pression initiale du gaz, V le volume de la cavité, L et R respectivement la longueur et le rayon du tube.

Avec un tube de longueur égale à 30 mm environ pour un rayon de 1 mm, le temps de réponse de l'ensemble tube et cavité est de l'ordre de 600 µs, correspondant au temps compris entre les arrivées, en sortie de tuyère, du choc d'amorçage et du début de l'écoulement stationnaire.

3.1.2. Mesure de transfert de chaleur

3.1.2.1. Principe de la mesure

Le calcul du flux de chaleur convectée en fonction de l'écart entre la température locale instantanée du modèle et sa température initiale supposée uniforme, est effectué par intégration de l'équation de la conduction de la chaleur. En faisant l'hypothèse que l'échange de chaleur se produit uniquement dans la direction normale à la surface de la maquette,

hypothèse qui est justifiée par le temps très court nécessaire à la mesure, le problème réel tridimensionnel est ainsi réduit à un problème unidimensionnel.

L'expression générale du flux de chaleur q(t) obtenue alors, s'écrit[23] :

$$q(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\rho_p c_p k_p}\left\{\underbrace{\frac{T(t)}{t^{1/2}}}_{(1)} + \frac{1}{\pi \cdot t^{1/2}}\underbrace{\int_0^t \frac{\tau^{1/2}(t) - t^{1/2}R(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\,d\tau}_{(2)}\right\} +$$

$$+ \frac{1}{\pi k_p}\left(\frac{k_j\rho_j c_j}{k_p\rho_p c_p} - 1\right)\left\{\underbrace{\frac{q(t)}{t^{1/2}}}_{(3)} + \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^t \frac{q(t)-q(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\,d\tau}_{(4)}\right\} \quad (1)$$

où τ est le paramètre d'intégration. Cette expression du flux calculée à l'instant t est la somme de quatre termes : 1 et 3 sont établis en supposant le flux constant depuis l'origine jusqu'à l'instant t et 2 et 4 apportent une correction tenant compte de la distribution réelle mesurée de la température $R(\tau)$. La valeur de q(t) peut être obtenue à partir de cette expression (1) en faisant un calcul itératif, laborieux. Cependant, il est possible de réaliser d'une part des jauges de mesure d'épaisseurs extrêmement faibles, de l'ordre du micron, et d'autre part de choisir le matériau isolant tel que $k_p\rho_p c_p \simeq k_j\rho_j c_j$; de sorte que les termes (3) et (4) de l'équation (1) sont rendus négligeables. L'expression (1) est alors simplifiée et peut s'écrire:

$$q(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\rho_p c_p k_p}\left\{\frac{T(t)}{t^{1/2}} + \frac{1}{\pi \cdot t^{1/2}}\int_0^t \frac{\sqrt{\tau}T(t) - \sqrt{t}.T(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\,d\tau\right\} \quad (2)$$

Dans le cas particulier d'un flux q(t) constant

$\frac{\sqrt{\tau}T(t)}{t(t-\tau)^{3/2}} = \frac{\sqrt{t}T(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}$ l'expression du flux se simplifie encore pour s'écrire :

$$q(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\rho_p c_p k_p}\ \frac{T(t)}{t^{1/2}} \qquad (3)$$

La sonde thermométrique constituant l'une des branches d'un pont de Wheatstone les expressions (2) et (3) du flux de chaleur en fonction des variations de tension aux deux extrémités de la diagonale du pont s'écrivent de la manière suivante :

$$q(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\sqrt{\rho_p c_p k_p}}{\alpha}\cdot\frac{1}{K R_j I_j}\left\{\frac{E(t)}{t^{1/2}} + \frac{1}{\pi . t^{1/2}}\int_0^t \frac{\sqrt{\tau}E(t) - \sqrt{t}E(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\,d\tau\right\} \qquad (4)$$

et

$$q(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\ \frac{\sqrt{\rho_p c_p k_p}}{\alpha}\ \frac{1}{K R_j I_j}\ \frac{E(t)}{t^{1/2}} \qquad (5)$$

Les irrégularités observées dans les enregistrements, réalisés au cours de la présente étude, à l'amorçage des rafales (planche 11), montrent que le flux de chaleur convectée ne peut être considéré comme constant, du moins dans la phase d'amorçage de l'écoulement gazeux. C'est par conséquent la relation (4) qui doit être utilisée pour calculer la valeur du flux à divers instants après la rupture de la membrane. Le calcul de q(t) est réalisé en utilisant une machine arithmétique électronique.

3.1.2.2. Description des sondes

Les sondes thermométriques sont des jauges à film mince de platine déposées sur des supports isolants en pyrex. Ces supports (Pl.12) sont placés soit à la paroi des modèles, soit à la paroi de la tuyère et sont usinés à la forme exacte des

surfaces dans lesquelles ils sont inclus.

3.1.2.3. Etalonnage des sondes

Le coefficient $\frac{\sqrt{\rho\, ck}}{\alpha}$ caractéristique de la liaison platine-pyrex est déterminé par étalonnage, la méthode consiste à dissiper, la sonde étant placée dans l'air, un flux de chaleur Q_o connu et constant d'origine électrique (fig.18 et fig.19).

Le circuit d'étalonnage est constitué d'une part, d'un pont de Wheatstone dans lequel est inclue la sonde, l'équilibrage dynamique du pont est réalisé au moyen d'un potentiomètre et d'une capacité variable à partir de signaux rectangulaires extrêmement brefs (50 µs), délivrés par l'alimentation à courant constant. D'autre part, l'alimentation transistorisée permet d'obtenir dans la sonde, indépendamment des signaux servant à l'équilibrage du pont, une intensité de courant réglable entre 0 et 150 milliampères, et constante pendant une durée variant de 500 à 3000 microsecondes. L'intensité de ce courant est déduite de la différence de potentiel aux bornes d'une résistance calibrée placée en série avec la jauge. L'ensemble du système de mesure est représenté sur les planches 13 et 14.

Dans ce cas l'expression (5) s'écrit simplement :

$$Q_{o_1} = A \left(\frac{\sqrt{\rho\, ck}}{\alpha}\right)_p \left(\frac{E(t)}{\sqrt{t}}\right)_p \quad \text{avec} \quad Q_o = \frac{R_j\, I_j^2}{S} \qquad (6)$$

La détermination de la surface S de la jauge effectuée généralement par procédé photographique étant assez imprécise ($\frac{\Delta S}{S}$ de l'ordre de 5 à 8 %) un deuxième étalonnage est effectué en immergeant la jauge dans un liquide ℓ_i (glycérine) dont les

propriétés thermiques sont connues, l'expression du flux Q_o est alors :

$$Q_{o_2} = A \left[\left(\frac{\sqrt{\rho ck}}{\alpha}\right)_p + \left(\frac{\rho ck}{\alpha}\right)_{\ell_i} \right] \cdot \left(\frac{E(t)}{\sqrt{t}}\right)_\ell \qquad (7)$$

Des relations (6) et (7) il vient avec $Q_{o_1} = Q_{o_2}$

$$\left(\sqrt{\rho ck}\right)_p = \left(\sqrt{\rho ck}\right)_\ell \cdot \left[\frac{\left(\frac{E(t)}{\sqrt{t}}\right)_p}{\left(\frac{E(t)}{\sqrt{t}}\right)_\ell} - 1 \right]^{-1}$$

où les indices p et ℓ_i sont attachés respectivement au pyrex et au liquide.

Le coefficient α est alors mesuré par calorimétrie.

3.2.4. Précision des mesures

La quantité d'azote initialement admise dans le tube B.P. est mesurée à l'aide d'un manomètre à mercure avec une précision 1 %.

Le nombre de Mach de l'onde de choc primaire calculé à partir de sa vitesse U_{o_c} est donné à moins de 1 % près.

Les tensions d'alimentation des ponts de Wheatstone pendant l'étalonnage et pendant l'essai, sont connues à 0,5 % près. Les résistances qui constituent ces ponts sont données à 0,5 % près.

Comme il a été dit plus haut l'aire S de la jauge est mesurée sur les photographies de la jauge examinées à l'aide d'un lecteur de microfilm. Il est tenu compte de la courbure sphérique de la maquette. L'imprécision est assez grande ($\frac{\Delta S}{S}$ de l'ordre de 5 à 8 %).

E(t) est mesuré sur les enregistrements à 1 % près. Ces causes d'erreurs entraînent sur la mesure de la densité du flux de chaleur une imprécision de l'ordre de 15 %.

3.2. Soufflerie hypersonique à rafales

3.2.1. Mesure de la pression à la paroi des modèles

Les mesures de pression ont été effectuées à l'aide de capsules manométriques différentielles à variation de reluctance réalisées à l'IMFM. Les lectures sont faites sur les enregistrements donnés par des potentiomètres MECI. Les capsules de faible volume intérieur, ont un court temps de réponse, adapté à la rapidité de déplacement de la plume de l'enregistreur ; la sensibilité maximum est de 10 mm par mm de mercure. Le faible encombrement de ces capsules permet de les loger dans le boitier porte dard, très près de la maquette de sorte que la longueur des canalisations de jonction entre la capsule et la prise de pression (diamètre égal à 0,8 mm) est faible.

Une électrovanne à trois directions est associée à chaque capsule ; avant la rafale les deux capacités d'une même capsule sont reliées à un réservoir où la pression de réservoir (inférieure à 10^{-3} mm Hg) est maintenue constante, au cours de la rafale l'électrovanne commandée automatiquement effectue la commutation nécessaire pour l'exécution de la mesure.

Les capsules sont étalonnées préalablement à l'aide d'un vacuomètre à mercure dans le domaine des pressions à mesurer.

3.2.1.2. Mesure du transfert de chaleur

Le principe de la détermination du transfert de chaleur dans le cas d'un corps à température uniforme[24] consiste à enregistrer, en fonction du temps, la température des pastilles en cuivre rouge de faible épaisseur encastrées à l'intérieur de la maquette en laiton massif et isolées de celle-ci. La face externe de la pastille est usinée à la forme exacte de la surface du modèle, la face interne est équipée d'un thermocouple cuivre - constantan en fil de 0,1 mm de diamètre relié à un enregistreur potentiométrique automatique.

Si la matière plastique séparant la pastille de la maquette peut être considérée comme un isolant parfait, la densité de flux de chaleur convecté à la pastille admet à l'instant initial t_i l'expression suivante $q = \frac{mc}{S} \left(\frac{dT}{dt}\right)$.

4. ECOULEMENT EN PRESENCE D'UN GRADIENT DE PRESSION NEGATIF

4.1. Ecoulement conique dans le divergent de la tuyère

Comme on l'a vu plus haut, le divergent de la tuyère $M_\infty = 10$ utilisé pour nos essais est tronconique ; le demi-angle d'ouverture est égal à 4,52°, ce qui donne pour une longueur de 2 m à partir du col, un diamètre de sortie égal à 350 mm. Cette tuyère a été finalement choisie pour remédier aux effets importants de l'écoulement conique observés avec une tuyère tronconique de grande ouverture.

En effet, la première tuyère $M_\infty = 10$ comportait aussi un divergent conique mais d'angle d'ouverture égal à 27°, soit une longueur de 60 cm et un diamètre de sortie de 250 mm. On réalisait ainsi, en dépit de la présence d'une couche limite d'épaisseur non négligeable un écoulement de source qui introduisait des erreurs très importantes sur la mesure de la pression et du flux de chaleur à la paroi des modèles placés dans la chambre d'expérience. L'étude que j'ai faite en collaboration avec R. Brun[27] a permis de déterminer l'influence de la conicité de l'écoulement à travers cette tuyère hypersonique sur la distribution de la pression et du flux de chaleur à la surface de corps de révolution élancés.

On admet que, dans tous les cas où le divergent de la tuyère est tronconique, l'écoulement non perturbé dans lequel les modèles sont placés, est un écoulement de source de caractéristiques suivants :

- L'origine de la source est prise au sommet du cône constitué par la partie divergente de la tuyère.

- Les conditions soniques de l'écoulement sont prises sur la calotte sphérique dont la section de base est celle du col ; elles sont supposées égales à celles de l'écoulement uniforme dans cette section.

- La pression $p_{s\infty}$, la densité $\rho_{s\infty}$ et le nombre de Mach $M_{s\infty}$ de l'écoulement libre sphérique, compte tenu des approximations résultant d'un régime hypersonique sont données par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} p_{s\infty} &= f_1 (\gamma , p_x) \cdot \left(\frac{r_x}{\sin\chi}\right)^{2\gamma} \cdot r^{-2\gamma} \\ \rho_{s\infty} &= f_2 (\gamma , \rho_x) \cdot \left(\frac{r_x}{\sin\chi}\right)^{2} \cdot r^{-2} \qquad (4.1) \\ M_{s\infty} &= f_3 (\gamma) \cdot \left(\frac{r_x}{\sin\chi}\right)^{1-\gamma} \cdot r^{\gamma-1} \end{aligned}$$

Les notations utilisées dans ces relations sont représentées dans la figure 15.

L'écoulement uniforme correspondant aurait pour conditions à l'abscisse L dans la tuyère :

$$\begin{aligned} p_\infty &= f_1 (\gamma , p_x) \cdot r_x^{2\gamma} \ (L \operatorname{tg} \alpha)^{-2\gamma} \\ \rho_\infty &= f_2 (\gamma , \rho_x) \cdot r_x^{2} \ (L \operatorname{tg} \alpha)^{-2} \qquad (4.2) \\ M_\infty &= f_3 (\gamma) \cdot r_x^{1-\gamma} (L \operatorname{tg} \ )^{\gamma-1} \end{aligned}$$

comme α est faible, il vient :

$$\frac{p_{s\infty}}{p_\infty} = \left(\frac{L}{r}\right)^{2\gamma} \qquad \frac{\rho_{s\infty}}{\rho_\infty} = \left(\frac{L}{r}\right)^{2} \qquad \frac{M_{s\infty}}{M_\infty} = \left(\frac{L}{r}\right)^{1-\gamma} \qquad (4.3)$$

En tenant compte d'une distribution newtonienne de la pression p_{sc} sur la surface d'un cône d'angle au sommet faible et en confondant l'angle du choc avec celui du corps on est conduit à l'expression dans le cas d'un cône à pointe vive :

$$p_{sc} = \frac{p_\infty}{\left(\frac{L}{L_o}\right)^{2\gamma}\left(1+\frac{s}{L}\right)^{2\gamma}} + 1{,}09\,\frac{2\,q_\infty\,\theta^2}{\left(\frac{L}{L_o}\right)^{2}\left(1+\frac{s}{L}\right)^{4}} \qquad (4.4)$$

avec $q_{s\infty} = \frac{1}{2}\,\rho_{s\infty}\,u_{s\infty}^2$

le nombre 1,09 étant un coefficient correctif tenant compte d'une répartition plus exacte de la pression (Taylor-Maccoll) ; et dans le cas d'un cône à pointe émoussée :

$$p_{sc} = \frac{p_\infty}{\left(\frac{L}{L_o}\right)^{2\gamma}\left(1+\frac{x}{L}\right)^{2\gamma}} + c_{p_S}\left(\theta-\varepsilon, \frac{x}{R}\right)\frac{q_\infty}{\left(\frac{L}{L_o}\right)^{2}\left(1+\frac{x}{L}\right)^{2}}$$

R est le rayon de l'émoussement sphérique. (4.5)

Le terme $C_p\left(\theta-\varepsilon,\frac{x}{R}\right) = \frac{p_{sc} - p_{s\infty}}{q_{s\infty}}$ est lu sur une abaque tracée à l'aide de la théorie des caractéristiques[30] pour des valeurs locales de $\frac{x}{R}$ et $\theta - \varepsilon$ ($\varepsilon = \text{Arcos}\,\frac{x+\ell}{r}$) considérées.

Les figures 16 et 17 montrent qu'il existe un accord raisonnable entre la théorie et les résultats obtenus sur un cône de demi-angle $\sigma = 15°$ longueur 20 cm placé dans l'écoulement en sortie de la tuyère.

On a porté dans les tableaux suivants les valeurs des coefficients a et b de l'expression de la pression calculée $p = a\,p_\infty + b\,q_\infty$ à la paroi des modèles coniques de demi-angle au sommet $\sigma = 7°$ et $15°$ placés sans incidence à la sortie de la tuyère de demi-angle d'ouverture 13,5°, de longueur sur l'axe 60 cm et à la sortie de la tuyère actuelle de demi-angle d'ouver-

ture 4,52° de longueur sur l'axe 200 cm.

Dans le cas d'un écoulement uniforme et avec l'hypothèse d'une répartition newtonienne de la pression, on aurait a = 1 pour σ = 7 et 15° , b = 0,0325 pour σ = 7° et b = 0,149 pour σ = 15° sur toute la génératrice des modèles coniques ; ces valeurs se retrouvent d'ailleurs en utilisant l'expression de la pression de source à la pointe des modèles coniques (s = 0).

s	L = 60		L = 200	
cm	a	b	a	b
0		0,0325		0,0325
5	0,799	0,0236	0,933	0,0295
10	0,649	0,0176	0,872	0,0267
15	0,535	0,0133	0,817	0,0244
20	0,447	0,0103	0,766	0,0222
30	0,321	0,0064	0,676	0,0186

s	L = 60		L = 200	
cm	a	b	a	b
0	1	0,149	1	0,149
5	0,799	0,108	0,933	0,136
10	0,649	0,0806	0,872	0,123
15	0,535	0,061	0,817	0,112
20	0,447	0,472	0,766	0,102
30	0,321	0,0295	0,676	0,0854

On peut déduire de ces résultats que l'effet de conicité est une fonction croissante de l'angle d'ouverture de la ligne de courant qui intersecte le modèle.

En ce qui concerne la répartition du flux de chaleur à la surface des modèles coniques les figures 18 et 19 permettent de comparer les résultats expérimentaux à ceux théoriques déduits de méthodes de similitude locales[31][32]. Dans le cas du cône à pointe vive, l'accord entre les répartitions expérimentales et théoriques est moins bon que dans le cas de la pression ; ceci est dû en partie à la précision relativement médiocre de la détermination des flux de chaleur (de l'ordre de

15 %). Dans le cas du cône émoussé, les courbes représentatives du flux de chaleur en fonction de l'abscisse réduite $\frac{x}{R}$ et calculée soit à partir des valeurs expérimentales de la pression (courbe 3) soit à partir de la relation (4.5) (courbe 2) sont très proches l'une de l'autre et voisines des points expérimentaux.

4.2. Calcul de la couche limite à la paroi du divergent

4.2.1. Couche limite laminaire

Les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie de la couche limite écrites pour l'écoulement à symétrie axiale dans le divergent de la tuyère, sont les suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u r) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v r) = 0$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(u \frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad (4.9)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{P_r} \frac{\partial H}{\partial y}\right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \quad \mu\left(1 - \frac{1}{P_r}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right.$$

La méthode de similitude locale permet de rendre le système d'équations intégrable. On introduit les nouvelles variables indépendantes d'Howarth-Doronizyn, soit :

$$\xi(x) = \int_0^x \rho_w u_w u_e r^2 \, dx$$

$$\eta(x,y) = \frac{u_e r}{2\xi} \int_0^y dy \qquad (4.10)$$

La vitesse de l'écoulement et l'enthalpie sont définies comme des fonctions de la variable de similitude η :

Il vient :

$$\frac{u}{u_e} = \frac{df\ (\eta)}{d\eta} = f'\ (\eta)$$

$$\frac{H}{H_e} = G\ (\eta) \qquad (4.11)$$

Les équations de la couche limite s'écrivent alors

$$(Cf'')' + ff'' = \frac{2\xi}{u_e}\ \frac{du_e}{d\xi}\ \left(f'^2 - \frac{\rho_e}{\rho}\right) \qquad (4.12)$$

$$\left(C\ \frac{G'}{P_r}\right)' + f\ G' = \frac{u_e^2}{2\ H_e}\ \left\{C\ \left(\frac{1}{P_r} - 1\right)\ 2\ f'\ f''\right\} \qquad (4.13)$$

Les conditions de similitude sont les suivantes :

$$\frac{2\xi}{u_e}\ \frac{du_e}{d\xi}\ \left(f'^2 - \frac{\rho_e}{\rho}\right) = F\ (\eta)$$

$$C = C\ (\eta) \qquad (4.14)$$

Si l'on pose

$$\theta\ (\eta) = \frac{H - H_w}{H_e - H_w} \quad \text{et} \quad t_w = \frac{H_w}{H_e} \qquad (4.15)$$

Le second membre de l'équation (4.12) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{2\xi}{u_e}\ \frac{du_e}{d\xi}\ \frac{T_{oe}}{T_e}\ \left(f'^2 - \frac{\rho_e}{\rho}\right) = \frac{2\xi}{u_e}\ \frac{du_e}{d\xi}\ \frac{T_{oe}}{T_e}\ \left[f'^2 - \theta\ (1-t_w) - t_w\right]$$

et d'autre part $\quad G = \frac{H}{H_e} = \theta\ (1 - t_w) + t_w$

Le problème est ramené à la résolution des équations ci-dessous analogues à celles applicables à l'écoulement plan d'un fluide incompressible. Les équations 4.12 et 4.13 deviennent :

$$(Cf'')' + ff'' = \beta\left[f'^2 - \theta\ (1 - t_w) - t_w\right]$$

$$\left(\frac{C\theta'}{P_r}\right) + f\theta' = \frac{2}{1 - t_w}\ \frac{u_e^2}{2H_e}\ \left(\frac{1}{P_r} - 1\right)\ f'\ f'' \qquad (4.16)$$

avec $\beta = \frac{2\xi}{u_e}\ \frac{du_e}{d\xi}\ \frac{T_{oe}}{T_e}$ = cte (4.17)

A la paroi $\eta = 0$ $\qquad f'_o = 0 \qquad \theta_{(o)} = 0$

A l'extérieur de la couche limite : (4.18)

$$\eta = \eta_e \qquad f'\ (\eta_e) = 1 \qquad \theta\ (\eta_e) = 1$$

4.2.1.1. Epaisseur de déplacement

L'épaisseur de déplacement est alors définie comme on le sait par la relation suivante :

$$\delta_1 = \int_o^\infty \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e\ u_e}\right)\ dy \qquad (4.19)$$

Utilisant les nouvelles variables η et ξ , il vient pour l'épaisseur de déplacement

$$\delta_1 = \int_o^\infty \frac{1}{\rho_e}\ \left(\frac{\rho_e}{\rho} - f'\right)\ \frac{\sqrt{2\xi}'}{ru_e}\ d\eta$$

ce qui donne en exprimant $\frac{\rho_e}{\rho}$ en fonction de f', θ et t_w

$$\delta_1 = \frac{\sqrt{2\xi}'}{\rho_e\ u_e r}\ \frac{T_{oe}}{T_e}\left[\int_o^\infty (1-f'^2)\ d\eta - (1-t_w)\int_o^\infty (1-\theta)\ d\eta - \frac{T_e}{T_{oe}} \cdot \int_o^\infty f'\ (1 - f')\ d\eta\right]$$

Les intégrales $I_1 = \int_0^\infty (1-f'^2)\, d\eta - (1 - t_w) \int_0^\infty (1 - \theta)\, d\eta$

$I_2 = \int_0^\infty f' (1- f')\, d\eta$ sont tabulées.

Elles sont données en fonction des valeurs des paramètres β, t_w et P_r [1]. L'épaisseur de déplacement s'écrit sous la forme suivante : :

$$\delta_1 = \frac{\sqrt{2\xi'}}{\rho_e\, u_e\, r}\ \frac{T_{oe}}{T_e}\left[I_1 - \frac{T_e}{T_{oe}} \cdot I_2\right] \qquad (4.20)$$

4.2.1.2. Flux de chaleur

L'expression du flux de chaleur s'écrit :

$$Q_w = \frac{k_w\, \rho_w\, u_e\, H_e\, (1-t_w)}{C_{pw} \cdot \sqrt{2\xi'}}\ \theta'(0) \qquad (4.21)$$

4.2.2. Conditions aux limites : écoulement à la frontière extérieure de la couche limite

Le calcul des grandeurs caractéristiques de l'écoulement extérieur suppose connue $\frac{dA}{A}$. Or $\frac{dA}{A}$ est fonction de l'épaisseur de déplacement de la couche limite. Comme le calcul de la couche limite ne peut être effectué qu'une fois connu l'écoulement sain, une itération est nécessaire pour connaître l'écoulement sain et les caractéristiques de celles-ci.

Deux calculs ont été effectués en supposant l'écoulement sain d'une part en équilibre thermodynamique, d'autre part hors d'état d'équilibre vibratoire. En effet, la détente des gaz est brève, sa durée totale comme on l'a vu au chapitre 2, est

de l'ordre de 700 µs. Or l'ajustement de l'énergie de vibration des molécules nécessite un temps dit de "relaxation" τ_v non négligeable dans l'échelle de temps envisagée, par contre les effets de la détente se font sentir instantanément sur l'énergie de translation et l'énergie de rotation.

Dans le cas d'un écoulement en état d'équilibre thermodynamique le calcul des paramètres de cet écoulement se fait simplement à partir des tables ARC Rapport 22778 (62).

Dans le cas d'un écoulement hors d'état d'équilibre vibratoire, le système d'équations permettant de déterminer les conditions thermodynamiques du gaz dans une section du diffuseur s'écrit de la manière suivante, en supposant le mouvement unidimensionnel et stationnaire :

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dU}{U} + \frac{dA}{A} = 0 \qquad \text{équation de conservation de la masse}$$

$$UdU + \frac{1}{\rho}\, dp = 0 \qquad \text{équation de quantité de mouvement} \qquad (4.22)$$

$$h_5 = C_{pa}\, T_{ao} + e_v(T_v) \qquad \text{équation de conservation de l'énergie}$$

avec $T_{ao} = T_5 + \frac{\mathcal{R}}{C_{pa}} \left[\frac{e_v(T_5)}{\mathcal{R}} - \frac{e_v(T_v)}{\mathcal{R}} \right]$, l'énergie de vibration étant ainsi directement liée à la température d'arrêt

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT_a}{T_a} \qquad \text{équation d'état}$$

équation de relaxation de vibration : la molécule d'azote est assimilée à un oscillateur harmonique ce qui permet d'écrire :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{e_v(T_v)}{\mathcal{R}} \right) = \frac{\frac{e_v(T_a)}{\mathcal{R}} - \frac{e_v(T_v)}{\mathcal{R}}}{\tau_v} \qquad (4.23)$$

Le temps de relaxation qui est fonction de la température T_f et de la pression, a été obtenu expérimentalement en opérant dans un gaz dont le degré de liberté de vibration est progressivement excité, c'est-à-dire dans un gaz dont les molécules acquièrent de l'énergie de vibration. Les dernières mesures faites par Millikan et White[33] conduisent à l'expression :

$$p\ \tau_{MW} = \exp\left[\ 230,26\ T_a^{-1/3} - 25,9271\ \right] \qquad (4.24)$$

où p est exprimée en atmosphère et τ_{MW} en microsecondes.

Comme l'ont déjà fait de nombreux auteurs[34] cette valeur de τ_{MW} a été introduite dans les équations fondamentales bien que dans le cas présent au cours de la détente à travers le divergent de la tuyère, les molécules perdent de l'énergie de vibration.

En suivant Shapiro[35] les équations fondamentales sont transformées en prenant comme nouvelles variables le nombre de Mach figé M_f et la température d'arrêt T_{ao}. Elles sont alors intégrables numériquement.

Le programme des calculs a été élaboré et exécuté par Mme J. Fauchas[36] ; ils ont été effectués sur ordinateur IBM 360-44 de l'Université d'Aix-Marseille.

4.2.3. Résultats théoriques et expérimentaux

Les résultats des mesures et leur comparaison avec les théories concernant les répartitions de la pression et de la densité de flux de chaleur sont représentés dans les figures (20)et(21).On a fait figurer les répartitions théoriques dans les cas suivants :

couche limite laminaire tout le long des parois de la tuyère en tenant compte d'un écoulement extérieur en équilibre thermodynamique et d'un écoulement extérieur hors d'équilibre vibratoire. Les points représentant les résultats des mesures de pression sont proches des courbes théoriques correspondant à un état d'équilibre ou de non équilibre vibratoire de l'écoulement sain. Cette comparaison permet de faire les constatations suivantes :

- les effets de relaxation vibratoires ne peuvent pas être mis en évidence par des mesures de pression ;

- c'est en diminuant notablement la valeur du temps de relaxation τ défini par Millikan et White que l'on obtient des modèles théoriques correspondant à un état de non équilibre rendant mieux compte de l'expérience.

- Quoiqu'il en soit, les résultats expérimentaux se placent bien de part et d'autre de la courbe théorique correspondant à un état d'équilibre thermodynamique de l'écoulement sain. En ce qui concerne la densité de flux de chaleur, les résultats expérimentaux se placent aussi plus près de la courbe théorique déduite des calculs supposant l'écoulement sain en état d'équilibre thermodynamique de celle déduite des calculs supposant un écoulement sain hors d'état d'équilibre vibratoire et en prenant $\tau = \frac{\tau_{MW}}{16}$.

On remarque aussi que le flux de chaleur augmente à la sortie de la tuyère, augmentation qui semble marquer le début de la transition, c'est pourquoi les planches (20) et (21) reproduisent aussi les résultats des calculs théoriques dans le cas d'une couche limite turbulente tout le long des parois de la tuyère. Le paragraphe suivant rend compte de la méthode utilisée pour le calcul de la couche limite turbulente.

4.2.4. 4.2.4. Couche limite turbulente

4.2.4.1. Epaisseur de déplacement

Le calcul de l'épaisseur de déplacement de la couche limite a été effectué avec les hypothèses suivantes :

- la couche limite turbulente a son origine au col de la tuyère.

- la couche limite est figée du point de vue vibratoire.

- la méthode intégrale de résolution des équations a été adoptée en admettant une loi de frottement analogue à celle de la plaque plane, une loi de vitesse à la puissance $\frac{1}{5}$, un facteur de récupération égal à 0,9 et en adoptant une température de référence dans la couche limite, selon la définition d'Eckert[37].

L'équation donnant l'épaisseur de perte de quantité de mouvement, ou équation de Karman s'écrit sous la forme :

$$\frac{1}{2} C_f = \frac{d\delta 2}{dx} + \delta_2 \left[\frac{\bar{H}+2}{u_e} \frac{du_e}{dx} + \frac{1}{\rho_e} \frac{d\rho_e}{dx} + \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} \right] \qquad (4.25)$$

Cette équation peut être intégrée lorsque $\bar{H} = \frac{\delta_1}{\delta_2}$ est connu ; $\bar{H}$ est tabulé pour différentes valeurs de

$$\frac{h_a}{h_e} - 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{h_w}{h_a} \quad ; \quad \text{avec :}$$

$$\frac{h_a}{h_e} - 1 = \frac{C_p T_a + E_v}{C_p T_e + E_v} - 1 \qquad (4.26)$$

et

$$\frac{h_w}{h_a} = \frac{C_p T_w + E_v(w)}{C_p T_a + E_v} \qquad (4.27)$$

Il est alors possible de connaître δ_1 par la relation :

$$\delta_1 = \bar{H} \cdot \delta_2$$

Le coefficient de frottement s'exprime en fonction du nombre de Reynolds de l'épaisseur de quantité de mouvement qui dépend des données de l'écoulement (nombre de Mach, température

de paroi) et d'un paramètre lié au gradient de pression longitudinal. Cette dernière influence est cependant négligeable et la relatinn de la plaque plane peut être utilisée. La loi $C_f(\delta_2)$ de l'incompressible est supposée applicable au compressible, ρ et μ étant déterminés à la température de référence T^*. Dans le cas de la couche limite turbulente le coefficient de frottement peut donc s'écrire sous la forme suivante :

$$C_f\ (\ \delta_2) = \frac{0,0172}{R_\delta^{1/5}}\ \frac{\rho}{\rho_e}\ \left(\frac{\mu}{\mu_e}\right)^{1/5} \qquad (4.28)$$

4.2.4.2. Transfert de chaleur

L'analogie de Reynolds conduit à la relation suivante entre le coefficient de Stanton[35] et le coefficient de frottement calculé à partir de la relation (4.25) :

$$\frac{C_{Hw}}{C_{fw}} = \frac{0,5}{1 - (1 - P_r)\ \frac{u_i}{u_e}} \qquad (4.29)$$

avec $C_{Hw} = \frac{q_w}{T_f . T_w} \times \frac{1}{C_p\ \rho_w\ u_e}$, u_i la vitesse de l'écoulement compris entre la sous couche laminaire et la couche turbulente P_r le nombre de Prandtl.

Le rapport de vitesse $\frac{u_i}{u_e}$ est déterminé expérimentalement dans un écoulement incompressible on trouve :

$$\frac{u_i}{u_e} = 11,5\ \sqrt{\frac{C_{fw}}{2}}$$

En portant (4.29) dans (4.28), il vient en prenant $P_r = 0,72$:

$$Q_w = \frac{\frac{C_{fw}}{2}}{1 - 3,45\ \frac{C_{fw}}{2}}\ \cdot\ \frac{T_f - T_w}{T_w}\ \frac{C_p}{R}\ \cdot\ P_e\ u_e$$

4.2.5. Etalonnage de la veine d'essais

Des mesures de pression d'arrêt ont été effectuées le long de deux diamètres orthogonaux de trois sections de la veine d'expérience distantes entre elles de 15 cm ; la section la plus en amont se trouvant distante de 10 mm de la section de sortie de la tuyère.

Les résultats des mesures sont représentées dans la figure 22.

On peut constater que la pression d'arrêt reste pratiquement constante à l'intérieur d'un cylindre de 20 cm de diamètre coaxial à la tuyère et d'une longueur supérieure à 30 cm. La pression décroît d'une façon continue à l'extérieur de ce cylindre et à l'intérieur d'un espace annulaire coaxial d'épaisseur 7,5 cm. Précisément on peut considérer que l'épaisseur de la couche limite, à la sortie de la tuyère est égale à 7,5 cm.

L'épaisseur de déplacement a été calculée théoriquement comme il a été indiqué dans les chapitres 4.2.1 et 4.2.4. dans les deux cas suivants :

Ecoulement laminaire dans la couche limite, écoulement turbulent complètement développé dans la couche limite turbulente. Les résultats de ce calcul sont représentés dans la figure 23. Les épaisseurs ainsi calculées en sortie de tuyère sont égales respectivement à 2 et 5,33 cm selon que la couche limite est laminaire ou turbulente. Si par analogie avec le cas de la plaque plane en écoulement incompressible on prend pour épaisseur de la couche limite laminaire 3 fois la valeur obte-

nue pour l'épaisseur de déplacement on obtient un chiffre qui est encore inférieur à l'épaisseur mesurée de la couche limite Il y a lieu de penser par conséquent qu'en sortie de la tuyère s'effectue le début de la transition ; conclusion qui découlait déjà des résultats des mesures exposés ci-dessus.

En ce qui concerne la répartition de la pression d'arrêt sur l'axe de la tuyère on constate que celle-ci décroît d'amont en aval passant de 200 à 175 m m de mercure.

Par suite on obtiendrait pour le nombre de Mach sur l'axe de la tuyère dans les trois sections déjà citées de l'amont vers l'aval 10,34 ; 10,55 et 10,62. Cette croissance du nombre de Mach s'explique par l'effet de source dû à la forme de la tuyère.

5. ECOULEMENT EN PRESENCE D'UN GRADIENT DE PRESSION POSITIF

5.1. Etude théorique de l'écoulement non visqueux

Le calcul des paramètres de la couche limite sur un corps quelconque peut être effectué lorsque l'écoulement potentiel à l'extérieur de la couche limite est connu. Le calcul exact de cet écoulement lorsque le corps est placé dans un courant supersonique ou hypersonique uniforme à l'infini ne peut être fait que par la méthode des caractéristiques. Il est en suite possible, lorsque la surface de l'obstacle présente une forme géométrique simple, de vérifier si la distribution de la pression à la surface de l'obstacle peut être approximée par les méthodes d'approximation de l'hypersonique : cône tangent, approximation de Newton-Buseman.

La méthode des caractéristiques est bien connue ; elle est présentée dans de nombreux ouvrages sous forme générale[38] [39]. Comme on le sait, son application est immédiate dans le cas d'un écoulement bidimensionnel isentropique ; dans un écoulement de révolution à variation d'entropie, la difficulté s'accroît : en effet les caractéristiques de l'hodographe ne se placent plus dans un plan mais dans un espace à 3 ou 4 dimensions suivant que les équations qui les déterminent sont exprimées en termes de pression ou en termes de vitesse et d'entropie. On retiendra la note technique de la NASA[40] (1965) qui traite de l'application de la méthode des caractéristiques à un écoulement de révolution rotationnel mais développé à la surface d'un modèle de géométrie différente de celle des modèles que nous nous proposons d'étudier ; la note technique NASA[41] (1969) rend

compte d'un programme de calculs basés sur la méthode des caractéristiques appliquée à des écoulements irrotationnels développés autour de modèles à pointe conique suivie d'une jupe concave, le programme étant applicable uniquement dans la région où les lignes de courant ont traversé le choc conique, attaché à la pointe du modèle, qui n'est pas encore dévié par les ondes de compression issues de la partie concave.

La méthode des caractéristiques a été appliquée ici à l'écoulement hypersonique rotationnel autour d'un corps à symétrie axiale constitué d'une partie avant conique raccordée tangentiellement à un corps dont les méridiennes sont des arcs de cercle ; l'avant pointe conique de longueur variable permet de calculer les données initiales au problème, le calcul étant ensuite étendu jusque dans la région où les lignes de courant traversent un choc incurvé.

5.1.1. Ecoulement autour de la pointe conique

L'étude de l'écoulement non visqueux autour de la pointe conique, a été réalisée par une méthode numérique d'intégration pas à pas des équations différentielles de Taylor et Maccoll. On sait que l'intégration de ces équations suivant Kopal[42] consiste à prendre comme données initiales la composante longitudinale de la vitesse sur le corps, le demi-angle au sommet du cône et à déterminer le demi-angle d'ouverture du choc et le nombre de Mach de l'écoulement à l'infini amont ; de sorte que les tables de Kopal ne sont pas très pratiques lorsque le nombre de Mach de l'écoulement infini amont est donné ; ce qui se produit dans la majorité des cas. La méthode de Sims[43] plus pratique consiste

en prenant les mêmes données initiales, à itérer sur la valeur de la composante longitudinale de la vitesse sur le corps jusqu'à trouver pour le nombre de Mach à l'infini celui choisi. Enfin on peut aussi, et c'est ce qui a été réalisé ici, se donner le nombre de Mach à l'infini amont, le demi-angle d'ouverture du choc attaché et calculer le demi-angle au sommet du cône correspondant ; on procède ensuite à un calcul par itération sur le demi-angle d'ouverture du choc jusqu'à trouver pour le demi - angle au sommet du cône correspondant celui du cône choisi.

5.1.1.1. Equations de Taylor-Maccoll

L'écoulement étant à symétrie axiale, les propriétés du fluide ainsi que les grandeurs mécaniques, gardent une valeur constante sur tout cône coaxial à l'obstacle. Dans ces conditions, les équations du mouvement s'écrivent :

$$\frac{du}{d\theta} = v \qquad (5.1)$$

$$\frac{dv}{d\theta} = -\left[u + \frac{a^2}{a^2-v^2}\ (u + v \cot g\ \theta\ )\right] \qquad (5.2)$$

avec $a^2 = \frac{\gamma-1}{2}\ (c^2-u^2-v^2)$ (5.3), a est la vitesse du son, c est la vitesse maximale définie par $c^2 = \frac{2\gamma RT_t}{\gamma - 1}$ (T_t : température d'arrêt) ; u et v sont les composantes de la vitesse définies dans la planche 24.

En posant $\bar{u} = \frac{u}{c}$ et $\bar{v} = \frac{v}{c}$ et en substituant (5.3) dans (5.2) on obtient les équations suivantes pour $\gamma = 1,4$:

$$\frac{d\bar{u}}{d\theta} = \bar{v} \qquad (5.1')$$

$$\frac{d\bar{v}}{d\theta} = -\left[\bar{u} + \frac{1 - \bar{u}^2 - \bar{v}^2}{1 - \bar{u}^2 - 6\bar{v}^2} \quad (\bar{u} + \bar{v} \cot g\ \theta)\right] \qquad (5.2')$$

Les équations (5.1') et (5.2') sont les équations fondamentales permettant de calculer l'écoulement autour d'un cône placé sans incidence dans un écoulement supersonique ou hypersonique. Avant de présenter la méthode d'intégration de ces deux équations, il est préférable de donner les valeurs initiales à partir desquelles se fait l'intégration pas à pas.

5.1.1.2. Valeurs initiales

Les valeurs initiales de l'écoulement sont obtenues à l'aide des relations de Rankine-Hugoniot donnant les valeurs des grandeurs thermodynamiques immédiatement derrière le choc conique attaché à la pointe du modèle ; on obtient (P1.24) avec $\gamma = 1,4$:

$$\bar{u}_o = \frac{u_o}{c} = \frac{u_\infty}{c} = \frac{V_\infty}{c}\ \frac{u_\infty}{V_1} = \frac{M_\infty \cos W}{(5+M_\infty^2)^{1/2}} \qquad (5.4)$$

$$\bar{v}_o = \frac{v_o}{c} = \frac{v_o}{v_\infty} \cdot \frac{V_\infty}{c} \cdot \frac{v_\infty}{V_1} = -\frac{5 + M_\infty^2 \sin^2 W}{6\, M_\infty \sin W\, (5 + M_\infty^2 \sin^2 W)^{1/2}} \qquad (5.5)$$

et

$$\bar{p} = \frac{p}{p_\infty} = \frac{7\, M_\infty^2 \sin^2 W - 1}{6} \qquad (5.6)$$

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_\infty} = \frac{6\, M_\infty^2 \sin^2 W}{M_\infty^2 \sin^2 W + 5} \qquad (5.7)$$

$$\bar{T} = \frac{T}{T_\infty} = \frac{(7\ M_\infty^2 \sin^2 W - 1)\ (M_\infty^2 \sin^2 W + 5)}{36\ M_\infty^2 \sin^2 W} \qquad (5.8)$$

$$\bar{p}_t = \frac{p_t}{p_{t_\infty}} = \frac{7\ M_\infty^2 \sin^2 W - 1}{6} \left[\frac{36\ M_\infty^2 \sin^2 W}{(7\ M_\infty^2 \sin^2 W - 1)(M_\infty^2 \sin^2 W + 5)} \right]^{3,5} \qquad (5.9)$$

5.1.1.3. Intégration pas à pas

Les valeurs initiales, correspondant à l'angle polaire $\theta = W$, de $\bar{u}$ et de $\bar{v}$ étant déterminées à l'aide des relations données au paragraphe précédent, on calcule les valeurs de $\bar{u}_{1a}$ et $\bar{v}_{1a}$ correspondant à l'angle polaire $\theta = W + \Delta\theta$ ($\Delta\theta < 0$) et ainsi de proche en proche, par exemple, connaissant les valeurs de $\bar{u}_{(n-1)a}$ et $\bar{v}_{(n-1)a}$ correspondant à l'angle polaire $\theta = W + (n-1)\Delta\theta$ on calcule les valeurs de $\bar{u}_{na}$ et $\bar{v}_{na}$ correspondant à l'angle polaire $\theta = W + n\Delta\theta$.

L'intégration pas à pas est basée sur le fait que pour des intervalles $\Delta\theta$ relativement petits, les variations de $\bar{u}$ et $\bar{v}$ correspondantes sont données approximativement par la formule:

$$\Delta \bar{u} = \frac{d\bar{u}}{d\theta} \cdot \Delta\theta \qquad \Delta\bar{v} = \frac{d\bar{v}}{d\theta} \Delta\theta \qquad (5.10)$$

de sorte qu'on peut écrire simplement :

$$\bar{u}_{na} = \bar{u}_{(n-1)a} + \left(\frac{du}{d\theta}\right)_{(n-1)a} \Delta\theta \qquad \bar{v}_{na} = \bar{v}_{(n-1)a} + \left(\frac{dv}{d\theta}\right)_{(n-1)a} \Delta\theta \qquad (5.11)$$

avec $n = 1,2,3...$; ainsi les valeurs approximatives de $\bar{u}$ et $\bar{v}$ peuvent être trouvées pour chaque valeur de θ .

On démontrerait aisément que l'erreur sur $\bar{u}$: $e_{u_n} = \bar{u}_n - \bar{u}_{na}$ (ou sur v = $e_{v_n} = \bar{v}_n - \bar{v}_{na}$) correspondant de la valeur de $\theta = W + n\Delta\theta$ est proportionnelle à $(\Delta\theta)^2$. ($\bar{u}_n$ et $\bar{v}_n$ étant les valeurs exactes, $\bar{u}_{na}$ et $\bar{v}_{na}$ les valeurs calculées).

Une méthode plus exacte d'intégration pas à pas consiste à utiliser les valeurs de $\frac{d\bar{u}}{d\theta}$ et $\frac{d\bar{v}}{d\theta}$ au milieu d'un intervalle ; de sorte que les équations (5.11) deviennent :

$$\bar{u}_{na} = \bar{u}_{(n-2)a} + 2\,(\frac{d\bar{u}}{d\theta})_{(n-1)a}.\Delta\theta \qquad \bar{v}_{na} = \bar{v}_{(n-2)a} + 2\,(\frac{dv}{d\theta})_{(n-1)a}.\Delta\theta \qquad (5.12)$$

l'erreur sur $\bar{u}$ (ou sur $\bar{v}$) est alors proportionnelle à $(\Delta\theta)^3$. Pour calculer les valeurs de $\bar{u}_{1a}$ et $\bar{v}_{1a}$, dans ce cas, on divise le premier intervalle en deux demi-intervalles et on calcule $\bar{u}_{0,5a}$ et $\bar{v}_{0,5a}$ puis $\bar{u}_{1a}$ et $\bar{v}_{1a}$ à l'aide des relations approchées suivantes :

$$\bar{u}_{0,5a} = \bar{u}_o + 0{,}5\,(\frac{d\bar{u}}{d\theta})_o.\Delta\theta \qquad \bar{v}_{0,5a} = \bar{v}_o + 0{,}5\,(\frac{d\bar{v}}{d\theta})_o.\Delta\theta =$$

et (5.13)

$$\bar{u}_{1a} = \bar{u}_o + (\frac{du}{d\theta})_{0,5a}\Delta\theta \qquad \bar{v}_{1a} = \bar{v}_o + (\frac{d\bar{v}}{d\theta})_{0,5a}\Delta\theta$$

5.1.1.4. Calcul de l'erreur

L'erreur $e_{u_n} = \bar{u}_n - \bar{u}_{na}$ a été déterminée par application de la règle de Simpson : on peut écrire par exemple pour n = 2 :

$$\bar{u}_2 = \bar{u}_o + \frac{\Delta\theta}{3}\left[(\frac{d\bar{u}}{d\theta})_o + 4\,(\frac{d\bar{u}}{d\theta})_{1a} + (\frac{d\bar{u}}{d\theta})_{2a}\right] \qquad (5.14)$$

où on a remplacé $(\frac{d\bar{u}}{d\theta})_1$ et $(\frac{d\bar{u}}{d\theta})_2$ par les valeurs approchées $(\frac{du}{d\theta})_{1a}$ et $(\frac{du}{d\theta})_{2a}$. Comme d'après (5.12) il vient pour n = 2

$$\bar{u}_{2a} = \bar{u}_o + 2 \left(\frac{d\bar{u}}{d\theta}\right)_{1a} \Delta\theta$$

il en résulte :

$$e_{\bar{u}_2} = \bar{u}_2 - \bar{u}_{2a} = \frac{\Delta\theta}{3} \left[\left(\frac{d\bar{u}}{d\theta}\right)_o - 2 \left(\frac{d\bar{u}}{d\theta}\right)_{1a} + \left(\frac{du}{d\theta}\right)_{2a} \right] \quad (5.15)$$

(5.15) donne l'erreur sur u_{2a} ; il convient donc de choisir la valeur de $\Delta\theta$ suffisamment petite pour rendre cette erreur aussi petite que l'on veut.

5.1.1.5. Détermination de la pression et de la vitesse du son

La pression et la vitesse du son sont obtenues simplement à l'aide des relations isentropiques suivantes :

$$\frac{p}{p_{t2}} = \left[1 - (\bar{u}^2 + \bar{v}^2)\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (5.16)$$

et

$$\frac{a}{a_{t_2}} = \left[1 - (\bar{u}^2 + \bar{v}^2)\right]^{1/2}$$

5.1.1.6. Détermination de l'angle du cône

L'angle du cône θ_c est déterminé par la condition : $\bar{v} = 0$ pour $\theta = \theta_c$. La composante $\bar{v}$ de la vitesse étant négative immédiatement derrière l'onde de choc (fig. 24) la valeur de θ pour laquelle $\bar{v} = 0$ peut être obtenue, dans la méthode d'intégration pas à pas, lorsque la première valeur de $\bar{v}$ positive est obtenue. Si θ_{n+1} est la première valeur de θ pour laquelle la composante $\bar{v}$ de la vitesse est positive et θ_{n-1} et θ_n les deux valeurs de θ précédentes pour

lesquelles la composante $\bar{v}$ est encore négative ; si $\bar{v}_{n+1}$, $\bar{v}_{n-1}$ et $\bar{v}_n$ sont les valeurs correspondantes de $\bar{v}$, le demi-angle au sommet du cône est donné par la relation suivante[44] (approximation parabolique de $\bar{v}$ en fonction de θ).

$$\theta_c = \theta_{n-1} + \frac{\theta_n - \theta_{n-1}}{2(\bar{v}_n + \bar{v}_{u+1} - 2\,\bar{v}_{n-1})} \left[\bar{v}_n - \bar{v}_{n+1} - \left\{ (\bar{v}_n - \bar{v}_{n+1})^2 - 8\bar{v}_{n-1}\,(\bar{v}_n + \bar{v}_{n+1} - 2v_{n-1}) \right\}^{1/2} \right] \qquad (5.17)$$

5.1.1.. Résultats

Le programme a été écrit dans le langage machine FORTRAN IV. Un exemple des résultats obtenus est donné dans la planche 25. Il correspond au cas suivant :

$M = 10$ avec $P_t = 184$ atm. et $T_t = 4020°K$

demi-angle au sommet du choc : $W = 9{,}81°$ demi-angle au sommet du cône $\sigma = 7°$.

5.1.2. Ecoulement autour d'un corps à méridienne circulaire

5.1.2.1. Equations des caractéristiques :

En notation vectorielle, l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit dans un écoulement stationnaire non visqueux sous la forme suivante :

$$\rho\ (\vec{q}.\mathrm{grad})\ \vec{q} = -\ \overrightarrow{\mathrm{grad}\ p} \qquad (5.18)$$

et en utilisant l'identité vectorielle suivante :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}\ (\tfrac{1}{2}\ q^2)} = (\vec{q}.\mathrm{grad})\ \vec{q} + \vec{q} \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}.q} \qquad (5.19)$$

l'équation (5;18) devient :

$$\overrightarrow{\text{grad}\ (\tfrac{1}{2}\ q^2)} - \vec{q} \wedge \text{rot.q}) = -\frac{1}{\rho}\ \overrightarrow{\text{grad}\ p} \qquad (5.20)$$

De la même façon, en notation vectorielle l'équation de conservation de l'énergie peut s'écrire sous la forme suivante :

$$T\ \overrightarrow{\text{grad}\ S} = \overrightarrow{\text{grad}\ H} - \frac{1}{\rho}\ \overrightarrow{\text{grad}\ p} \qquad (5.21)$$

En combinant les équations (5.20) et (5.21) il vient :

$$\vec{q} \wedge \overrightarrow{\text{rot}\ q} = \overrightarrow{\text{grad}\ (\tfrac{1}{2}\ q^2)} + \overrightarrow{\text{grad}\ H} - T\ \overrightarrow{\text{grad}\ S}$$

soit

$$\vec{q} \wedge \overrightarrow{\text{rot}\ q} = \overrightarrow{\text{grad}\ H_o} - T\ \overrightarrow{\text{grad}\ S} \qquad (5.22)$$

avec $H_o = H + \frac{1}{2}\ q^2$

Dans un écoulement plan, on a symétrie axiale l'équation (5.22) se réduit à la relation suivante[38] :

$$\vec{q}\ .\ (\overrightarrow{\text{rot}\ q})_z = T\ .\ \frac{dS}{dn} - \frac{dH_o}{dn} \qquad (5.23)$$

n étant la normale à la ligne de courant et $(\overrightarrow{\text{rot}\ q})_z$ la composante non nulle du rotationnel $(\overrightarrow{\text{rot}\ q})_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$; S l'entropie, H_o l'enthalpie totale, T la température, u la composante de la vitesse q suivant l'axe des x, v la composante de la vitesse suivant l'axe des y.

Si de plus l'écoulement est isoénergétique H_o = cte et (5.23) s'écrit :

$$\vec{q}.(\overrightarrow{\text{rot}\ q})_z = T\ \frac{dS}{dn} \qquad (5.24)$$

Introduisons la fonction de courant ψ telle que $\frac{\partial \psi}{\partial y} = \rho\ \ u\ y^j$

et $\frac{\partial \psi}{\partial x} = - \rho v y^j$ (ρ étant la densité ; j = 0 pour un écoulement plan et j = 1 pour un écoulement à symétrie axiale), l'équation de continuité qui s'écrit :

$$\frac{\partial \rho u y^j}{\partial x} + \frac{\partial \rho v y^j}{\partial y} = 0 \qquad (5.25)$$

est automatiquement satisfaite par la fonction de courant, et l'équation (5.24) peut se mettre sous la forme suivante :

$$(\overrightarrow{rot\ q})_z = \rho y^j T \frac{dS}{d\psi} \qquad (5.26)$$

En se servant, d'autre part, de l'identité suivante :

$$\rho(\overrightarrow{rot\ q})_z = \rho \frac{\partial v}{\partial x} - \rho \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \rho v}{\partial x} - \frac{\partial \rho u}{\partial y} - (v \frac{\partial \rho}{\partial x} - u \frac{\partial \rho}{\partial y}) \qquad (5.27)$$

dans laquelle l'expression $v \frac{\partial \rho}{\partial x} - u \frac{\partial \rho}{\partial y}$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$v \frac{\partial \rho}{\partial x} - u \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{1}{a^2} (v \frac{\partial p}{\partial x} - u \frac{\partial p}{\partial y}) + \frac{1}{C_p} \frac{dS}{d\psi} \left[(\frac{\partial \psi}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \psi}{\partial y})^2 \right] \frac{1}{y^j} \qquad (5.28)$$

Il suffit pour cela de se rappeler que dans un écoulement isoénergétique rotationnel la pression est une fonction de la densité et de l'entropie selon la relation suivante :

$$\frac{p}{p_o} = \left(\frac{\rho}{\rho_o} \right)^{\gamma} e^{\frac{S-S_o}{\mathcal{R}} (\gamma-1)}$$

où p_o, ρ_o, S_o sont la pression, la densité et l'entropie de référence, $\mathcal{R}$ la constante des gaz parfaits et $\gamma = 1,4$; en exprimant dans (5.28) $\frac{\partial p}{\partial x}$ et $\frac{\partial p}{\partial y}$ en fonction de ψ et en utili-

sant les relations du mouvement :

$$\rho \frac{Du}{Dt} = - \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = - \frac{\partial p}{\partial y} \qquad (5.30)$$

avec $\frac{D}{Dt} = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$; l'équation (5.26) prend finalement la forme suivante :

$$\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{2u\,v}{a^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{j}{y^j} \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$= - \frac{\rho y^j}{\gamma R} \cdot \frac{a}{M} \frac{dS}{dn} \left[1 + (\gamma-1) M^2\right] \qquad (5.31)$$

avec $M = \frac{q}{a}$. L'équation (5.31) est l'équation différentielle fondamentale pour la fonction de courant dans un écoulement isoénergétique d'un fluide compressible ; cette forme se prête à l'étude par la méthode des caractéristiques.

Les deux familles de caractéristiques dans le plan (x,y) sont alors données par l'équation suivante :

$$\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{2u\,v}{a^2} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) = 0 \qquad (5.32)$$

Ces caractéristiques physiques sont d'ailleurs identiques à celles d'un écoulement irrotationnel plan ou à symétrie axiale ; les solutions sont données par les relations suivantes :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\pm} = \frac{- u\,v \pm a \sqrt{q^2 - a^2}}{a^2 - u^2}$$

En posant $\sin \alpha = \frac{1}{M} = \frac{a}{q}$ (α angle de Mach), $u = q \cos \theta$,

$v = q \sin \theta$ (θ angle de la ligne de courant avec l'axe des x), il vient :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_+ = \operatorname{tg} (\theta - \alpha) \text{ caractéristique c'}$$
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_- = \operatorname{tg} (\theta + \alpha) \text{ caractéristique c''} \qquad (5.33)$$

Les deux familles de caractéristiques de l'hodographe sont données par l'équation suivante :

$$\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\mp} d \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) d \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)$$
$$+ \left[\frac{-j}{y^j} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\rho y^j}{\gamma R} \frac{a}{M} \frac{dS}{dn} (1 + (\gamma-1) M^2) \right] dy = 0 \qquad (5.34)$$

Elles diffèrent de celles d'un écoulement irrotationnel par la variation d'entropie $\frac{dS}{dn}$. On peut aussi les écrire sous la forme :

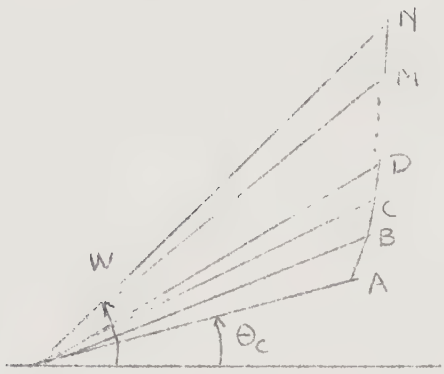
$$d\theta \mp \frac{dq}{d} \cot g\alpha \mp \frac{\sin \alpha . \cos \alpha}{\gamma R} dS \mp j \frac{\sin \theta . \sin \alpha}{\sin (\theta \mp \alpha)} \frac{dy}{y} = 0 \qquad (5.35)$$

En posant $\frac{2}{\gamma-1} \frac{da}{a} - \frac{dS}{\gamma R} = \frac{1}{\gamma-1} dQ$ on introduit une variable auxiliaire $Q = \operatorname{Log}_e a^2 - \frac{S}{C_p}$ et on peut remplacer les équations (5.35) par les équations suivantes :

$$d\theta - \frac{\sin \alpha . \cos \alpha}{\gamma - 1} dQ - j \frac{\sin \theta . \sin \alpha}{\sin (\theta - \alpha)} \frac{dy}{y} = 0 \qquad (5.36)$$

$$d\theta + \frac{\sin \alpha . \cos \alpha}{\gamma - 1} dQ + j \frac{\sin \theta . \sin \alpha}{\sin (\theta + \alpha)} \frac{dy}{y} = 0 \qquad (5.37)$$

Ligne de départ :



La ligne de départ est constituée par l'ensemble des caractéristiques de la forme $\frac{dy}{dx} = tg\ (\theta+\alpha)$ qui interceptent pour la première fois les rayons vecteurs (tels que OB) issus du sommet du cône ; elle prend naissance au point de tangence de la génératrice du cône et de la méridienne circulaire.

5.1.2.2. Calcul des points sur la ligne de départ :

Le demi-angle au sommet du corps θ_c et les coordonnées géométriques du point A sont fixées ; les quantités a, q, $\frac{S}{R}$ et Q sont aussi connues au point A et le long des rayons vecteurs OB, OC..., les coordonnées d'un point quelconque B sur la ligne de départ sont obtenues par l'intersection de la caractéristique AB et du segment de droite OB ; elles sont calculées à l'aide du système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} y_B - y_A &= (x_B - x_A)\ tg\ (\theta_A + \alpha_A) \\ y_B &= x_B \cdot tg\ (\theta_c - \Delta\theta) \qquad (\Delta\theta < 0) \end{aligned} \tag{5.38}$$

les autres grandeurs θ_B, α_B, q_B, ... sont obtenues à l'aide des relations suivantes (avec $\gamma = 1,4$) :

$$tg\ \theta_B = \frac{\bar{u}_B \sin(\theta_c - \Delta\theta) + \bar{v}_B \cos(\theta_c - \Delta\theta)}{\bar{u}_B \cos(\theta_c - \Delta\theta) - \bar{v}_B \sin(\theta_c - \Delta\theta)}$$

$$\sin \alpha_B = \left[\frac{0,2\ (1 - \bar{u}_B^2 - \bar{v}_B^2}{\bar{u}_B^2 + \bar{v}_B^2} \right]^{1/2} \qquad (5.39)$$

$$q_B = a_t \left[\frac{2}{\gamma-1} (\bar{u}_B^2 + \bar{v}_B^2) \right]^{1/2}$$

la ligne de départ A,B,C,D,... est une ligne à entropie constante ; l'entropie est celle calculée derrière le choc conique à l'aide de la relation suivante :

$$\frac{S_B}{R} = \frac{S_C}{R} = \ldots = \frac{S_N}{R} = \frac{S_t}{R} + \text{Log}_e \left[\frac{0,4 + \frac{2}{(M_\infty \sin W)^2}}{2,4} \right]^{3,5} \cdot \qquad (5.40)$$

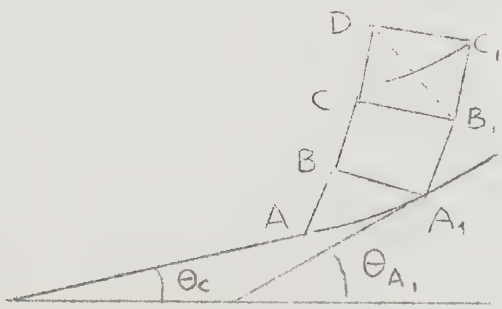
$$\left[1,1667\ (M_\infty \sin W)^2 - 0,1667 \right]^{2,5}$$

par suite, il vient :

$$Q_B = Q_t + \text{Log}_c \frac{1}{0,2} \left(\frac{a}{c} \right)^2 - \frac{S_B - S_t}{3,5\ R} \qquad (5.41)$$

Une meilleure approximation des coordonnées du point B peut être obtenue en remplaçant $(\theta+\alpha)_A$ par la demi-somme $\frac{(\theta+\alpha)_A + (\theta+\alpha)_B}{2}$. Le calcul des nouvelles valeurs de x_B, y_B, ... est alors repris et ainsi de suite jusqu'à ce que deux valeurs consécutives de x_B et y_B ne diffèrent plus que d'une quantité égale à la précision demandée.

5.1.2.3. Calcul d'un point sur le corps



Le point A_1 est à l'intersection de la caractéristique de la forme $(\frac{dy}{dx})_B = \text{tg}\ (\theta-\alpha)_B$ et de l'arc de cercle A_1A.

D'autre part le corps défini par la

ligne OAA_1 est ligne de courant : l'angle θ_{A1} est donc l'angle fait par la tangente à l'arc de cercle et l'axe des x.

La quantité Q_{A1} est obtenue à l'aide de l'équation de l'hodographe correspondant à la caractéristique physique $\frac{dy}{dx} = tg\ (\theta-\alpha)$ elle s'écrit pour le point A_1 :

$$\theta_{A1} - \theta_B - \frac{\sin \alpha_B - \cos \alpha_B}{0,4} (Q_{A1} - Q_B) - j \frac{\sin \theta_B . \sin \alpha_B}{\sin (\theta_B - \alpha_B)} \cdot \frac{y_{A1} - y_B}{y_{A1}} = 0 \qquad (5.42)$$

Une approximation plus grande est réalisée en opérant de la même façon qu'au paragraphe précédent ; (dans l'équation (5.42) les coefficients de dQ et dy sont moyennés en prenant au lieu de θ_B et α_B la demi-somme $\frac{\theta_B + \theta_{A1}}{2}$ et $\frac{\alpha_B + \alpha_{A1}}{2}$).

5.1.2.4. Calcul d'un point dans le champ d'écoulement compris entre le choc et le corps

Les coordonnées géométriques d'un point quelconque du champ sont obtenues par l'intersection de deux caractéristiques de signe opposé, par exemple pour le point C_1 :

$$\begin{aligned} y_{C1} - y_D &= (x_{C_1} - x_D)\ tg\ (\theta_D - \alpha_D) \\ y_{C_1} - y_{B_1} &= (x_{C_1} - x_{B_1})\ tg\ (\theta_{B_1} \quad \alpha_{C_1}) \end{aligned} \qquad (5.43)$$

Les équations de l'hodographe permettent de déterminer θ et Q ; on les écrits sous la forme suivante :

$$\theta_{C_1} - \theta_D - \frac{\sin\alpha_D \cos\alpha_D}{0,4}(Q_{C_1} - Q_D) - j \frac{\sin\theta_D}{\sin(\theta_D - \alpha_D)} \cdot \frac{\sin\alpha_D}{y_D} \cdot \frac{y_{C_1} - y_D}{y_D} = 0 \qquad (5.44)$$

$$\theta_{C_1} - \theta_{B_1} + \frac{\sin\alpha_{B_1} \cos\alpha_{B_1}}{0,4}(Q_{C_1} - Q_{B_1}) + j \frac{\sin\theta_{B_1} \sin\alpha_{B_1}}{\sin(\theta_{B_1} + \alpha_{B_1})} \frac{y_{C_1} - y_{B_1}}{y_{B_1}} = 0$$

L'entropie au point C_1 est calculée par interpolation linéaire entre les points D et B_1 ; il vient :

$$\frac{S_{C_1}}{R} = \frac{S_D}{R} \frac{y_{CM} - y_{B_1}}{y_D - y_{B_1}} - \frac{S_{B_1}}{R} \frac{y_{CM} - y_D}{y_D - y_{B_1}} \qquad (5.45)$$

la coordonnée y_{CM} du point CM compris entre D et B_1 est déterminée en approximant la direction de la ligne de courant passant par le point C_1 par tg θ_{C_1} ; ce qui donne l'équation suivante :

$$y_{CM} - y_{C_1} = (x_{CM} - x_{C_1}) \text{ tg } \theta_{C_1}$$

et en remarquant qu'on peut écrire :

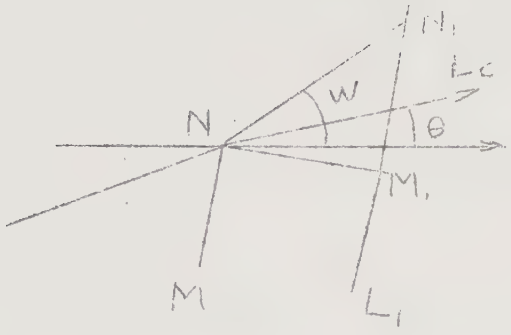
$$\frac{y_D - y_{CM}}{y_D - y_{B_1}} = \frac{x_D - x_{CM}}{x_D - x_{B_1}}$$

on trouve :

$$y_{CM} = \frac{(x_D - x_{C_1}) \text{ tg } \theta_{C_1} \cdot \frac{y_D - y_{B_1}}{x_D - x_{B_1}} + y_{C_1} \frac{y_D - y_{B_1}}{x_D - x_{B_1}} - y_D \text{ tg } \theta_{C_1}}{\frac{y_D - y_{B_1}}{x_D - x_{B_1}} - \text{tg } \theta_{C_1}}$$

Une meilleure approximation des grandeurs au point C_1 est obtenue en opérant de la même manière qu'aux paragraphes précédents.

5.1.2.5. Calcul d'un point sur le choc courbé



De part et d'autre d'une ligne de courant NLC les pressions sont égales ; l'hypothèse que la pression p_{M_1} est égale à la pression p_{N_1} permet de calculer l'angle W que fait la direction du choc avec l'axe des x : on utilise pour cela la relation de Rankine-Hugoniot suivante :

$$\frac{p_{N_1}}{p} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(M_\infty^2 \sin^2 W - 1\right) \qquad 5.46)$$

L'angle W étant ainsi déterminé on peut aisément calculer les autres grandeurs en N_1 :les coordonnées géométriques de N_1 sont l'intersection du segment NN_1 et de la caractéristique M_1N_1 ; l'angle θ est calculé à l'aide de la relation suivante :

$$\theta = \text{Arctg} \frac{(M_\infty^2 \sin^2 W - 1)\ \text{cotg}\ W}{\frac{\gamma+1}{2} M_\infty^2 - (M_\infty^2 \sin^2 W - 1)} \qquad (5.47)$$

5.1.3. Approximation de Newton-Buseman

La couche de choc développée autour de modèles placés dans des écoulements supersonique ou hypersonique est suffisamment mince pour qu'on puisse considérer l'écoulement pariétal comme un écoulement Newtonien ; dans des modèles à méridienne courbe, il y a lieu de tenir compte de l'effet de la

force centrifuge qui tend à comprimer le gaz sur la paroi ; le coefficient de pression s'exprime alors sous la forme générale suivante[45] :

$$C_p = 2 \left[\sin^2\alpha + \frac{\sin\alpha}{r} \frac{d\alpha}{dr} \int_{r_j}^{r} \cos\alpha \cdot r \cdot dr \right] \quad (5.48)$$

Une démonstration de cette relation est présentée dans l'annexe III.

Dans le cas particulier de corps à pointe conique raccordée tangentiellement à une jupe dont la méridienne est un arc de cercle,cette expression devient :

$$C_p = 2 \left\{ \sin^2\alpha + \frac{1}{6R^2} \left[r \ (2r_w - 2r) - \frac{r_j^2}{r} (3\, r_w - 2\, r_j) \right] \right\} \quad (5.49)$$

lorsque les modèles n'ont pas de pointe conique ($s_j = 0$, $r_j = 0$) il vient :

$$C_p = 2 \left\{ \sin^2 \ + \frac{1}{6R^2} \left[r \ (3r_w - 2r) \right] \right\} \quad (5.50)$$

ou encore $C_p = 2 \ (\sin^2\sigma + \frac{5}{2} \ \frac{r}{R} \cos\sigma - \frac{4}{3} \ \frac{r^2}{R^2})$. On peut remarquer que, dans ce dernier cas, la répartition du C_p se résoud en une courbe unique $C_p = f\ (\frac{s}{R})$ pour σ donné ; en effet $\frac{r}{R} = \cos\sigma - \cos\frac{s}{R}$. Enfin pour des corps élancés à pointe conique, l'expression (5.49) devient, en faisant l'approximation $\sin\alpha = \alpha$ et $\cos\alpha = 1$

$$C_p = 2 \left[\left(\frac{dr}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2} \, r \, \frac{d^2r}{dx^2} \ \left(1 - \left(\frac{r_j}{r}\right)^2\right) \right] \quad (5.51)$$

5.1.4. Approximation du cône tangent

En supposant que la pression locale a pour valeur exacte la pression sur le cône ayant la même inclinaison que celle des lignes de courant sur la surface, et pour direction à l'amont de ces cônes, celle de l'écoulement non perturbé, on démontre que le C_p s'exprime sous la forme suivante(45) :

$$C_p = \frac{2}{\gamma M_\infty^2}\left[\frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(F_2^2 - 1\right) + \gamma\left(F_2 - F_1\right)^2 \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1+2/F_1^2}\right)\right] \quad (5.52)$$

où $F_1 = M_\infty \alpha$

$$F_2 = \frac{\gamma+1}{\gamma+3} F_1 + \left[\left(\frac{\gamma+1}{\gamma+3}\right)^2 F_1^2 + \frac{2}{\gamma+3}\right]^{1/2}$$

à consition que $F_1 > 1$ et que $\frac{\alpha_c - \alpha}{\alpha}$ soit petit, c'est-à-dire que le choc soit voisin de la paroi.

Remarque : En retenant uniquement l'hypothèse de l'inclinaison locale des cônes et celle de l'écoulement à l'infini amont, la distribution de pression se calcule aussi pas à pas sur la surface du modèle par intégration des équations de Taylor-Maccoll.

5.1.5. Résultats théoriques concernant l'écoulement non visqueux

Dans l'étude générale de l'écoulement autour des modèles considérés, la forme de l'onde de choc, la structure et l'épaisseur de la couche de choc présentent un intérêt certain pour la connaissance des conditions d'entrée des gaz dans le réacteur, mais l'objet de la présente recherche étant une première étape, l'étude de l'écoulement au voisinage immédiat de la paroi, les

résultats les plus intéressants sont ceux qui concernent la répartition des grandeurs mécaniques de l'écoulement à la surface des modèles. On fera cependant quelques remarques en ce qui concerne la structure plus particulière de la couche de choc développée autour des modèles à pointe conique ($\frac{s_j}{R} \neq 0$).

5.1.5.1. Cas des modèles à méridienne circulaire

Le régime d'écoulement non visqueux autour de ces modèles, définis par le demi-angle au sommet σ et le rayon de courbure R de la génératrice, est un régime d'onde mixte ; les caractéristiques de compression constituées par les lignes de Mach issues des génératrices concaves du modèle ont une convergence telle qu'elles ne se rencontrent pas dans la couche de choc d'épaisseur très faible ; elles se réfléchissent sur le choc attaché à la pointe du modèle en caractéristiques (de compression ou détente) d'intensité beaucoup plus faible et qui pourraient être négligées dans tous les cas envisagés.

Les répartitions du coefficient de pression pariétal C_p calculé à partir de la méthode des caractéristiques et par les méthodes approximatives de Newton, Buseman et du cône tangent sont voisines (fig.26) ; celle obtenue par Newton-Buseman étant pratiquement confondue avec celle déduite de la méthode des caractéristiques. Exprimées en fonction de l'abscisse curviligne réduite $\frac{s}{R}$ elles sont indépendantes du rayon de courbure R.

Les répartitions de vitesse et du nombre de Mach à la paroi des modèles, obtenues à partir de la répartition du C_p

de Newton-Buseman avec l'hypothèse d'un écoulement isentropique au voisinage de la paroi, sont identiques à celles déduites de la méthode des caractéristiques comme le montre l'exemple de la figure 28 où la répartition du nombre de Mach M_e est représentée dans les cas particuliers $M_\infty = 4$, $T_{\infty\ o} = 600°K$, $p_{o\infty} = 5$ bars ; $M_\infty = 7$, $T_{o\infty} = 600°K$, $p_{o\infty} = 25$ bars et $M_\infty = 10$, $T_{o\infty} = 4020°K$ et $p_{o\infty} = 184$ bars.

Ces modèles utilisés comme corps centraux de prises d'air ont une efficacité fonction croissante de l'abscisse réduite $\frac{s}{R}$. C'est ainsi que pour $\frac{s}{R} = 0,3$ ($\sigma = 7°$) qui correspond approximativement à l'abscisse réduite maximum des modèles expérimentés, et pour M = 4, l'efficacité, en régime critique c'est-à-dire lorsque le choc droit est attaché à la lèvre de carène, est de 0,38 au voisinage de la paroi, tandis qu'elle n'est que de 0,14 pour une prise d'air du type Pitot et 0,16 pour une prise d'air à corps central conique de même demi-angle au sommet. Pour $\frac{s}{R} = 0,75$ on aurait une efficacité en régime critique de 0,60 ; pour $\frac{s}{R} = 1$ qui correspond à l'abscisse réduite maximum au-delà de laquelle il y a blocage de la couche de choc, l'efficacité est de 0,66.

Ce gain très appréciable d'efficacité calculé, comme on vient de le dire, au voisinage de la paroi du corps central diminue notablement quand on se déplace de la paroi au choc attaché à la pointe : les pertes de pressions génératrices et les gains sur les nombres de Mach dans une section droite de la couche de choc entrainent des pertes sur les pressions génératrices derrière le choc droit. Dans l'exemple choisi $M_\infty = 4$, $\frac{s}{R} = 0,3$ cette perte relative d'efficacité est de 19 %. On voit donc qu'au profit d'un accroissement notable d'efficacité, elle est ici, en moyenne, 2,15 fois plus grande que celle d'une prise d'air à

corps central conique de même demi-angle au sommet σ, il se produit une perte d'homogénéité de l'écoulement à l'entrée du compresseur d'un turboréacteur, ou à l'entrée des chambres de combustion d'un statoréacteur. Cependant, il ne faut pas oublier que l'hétérogénéité de l'écoulement, due à la présence de la couche limite, près des parois, peut être beaucoup plus importante.

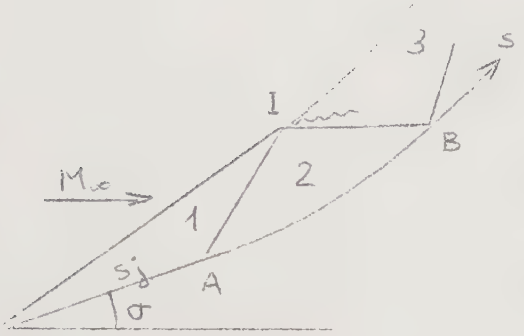
Il reste à noter qu'il existe une abscisse réduite limite $\frac{s}{R}$ pour laquelle l'angle α ($\alpha = \alpha + \frac{s}{R}$) défini par la direction de l'écoulement à l'infini amont et la tangente à la méridienne du modèle est égal au demi-angle au sommet du cône qui, placé dans le même écoulement, aurait une onde de choc détachée de la pointe. La strioscopie de l'écoulement autour du modèle représenté dans la planche 29 montre qu'au voisinage de cette abscisse la couche de choc est le siège de fortes interactions ; la direction de l'onde de choc attachée à la pointe du modèle tendant alors à devenir normale à celle de l'écoulement infin amont. Dans le cadre de notre étude, l'analyse de l'écoulement a été faite autour de modèles tels que l'abscisse réduite $\frac{s}{R}$ reste inférieure à l'abscisse réduite limite définie ci-dessus. Lorsque le nombre de Mach infini amont est compris entre 4 et 10, l'angle limite α varie de 53 à 57° ce qui conduit à des valeurs de $\frac{s}{R}$ voisines de l'unité dans le cas où $\sigma = 7°$. La strioscopie de la planche 30 représente un tel cas.

5.1.5.2. Cas des modèles à pointe conique

La structure de l'écoulement non visqueux autour de ces modèles définis par le demi-angle au sommet, σ , la longueur de la génératrice de la pointe conique et le rayon de courbure

R de la jupe raccordée tangentiellement au cône, est différente suivant la nature des ondes qui s'y propagent.

On note depuis la pointe trois régions distinctes comme le montre le schéma ci-dessous, où sont représentées dans le plan méridien les traces des chocs et de la paroi du modèle.



La première région correspond à l'écoulement autour de la pointe conique, c'est une région d'ondes simples parallèles entre elles ; dans la seconde qui prend naissance sur la ligne de raccordement cône - jupe A se forme une onde de compre-sion dont les premières caractéristiques convergent pour former le choc qui intersecte en I le choc de la même famille attaché à la pointe du modèle, le produit de cette interaction est un choc renforcé, une surface de glissement et une onde réfléchie IB de l'autre famille qui établit l'égalité des pressions de part et d'autre de la surface de glissement et sert de frontière à la 3ème région où se propagent des ondes de familles différentes : celles de compression issues de la paroi du modèle et celles de l'autre famille (compression ou détente) provenant de la réflexion de ces ondes de compression sur le choc attaché à la pointe du modèle. L'écoulement dans cette dernière région a une structure identique à celle de l'écoulement autour des modèles sans pointe conique.

La tête de l'onde réfléchie , qui dans tous les cas envisagés est une onde de détente, rencontre la paroi du modèle

en B ; l'abscisse de B dépend de la position de I donc des dimensions du modèle et de M_∞ . Un calcul simple montre que cette abscisse est, pour σ fixé, fonction croissante de s_j et décroissante de M_∞.

Les modèles étudiés ayant une longueur telle que $\frac{s_{max} - s_j}{R} < 0,3$, l'onde réfléchie issue du point I peut, dans certaines conditions d'essais ne pas intersecter la paroi ; c'est ainsi que par exemple pour les modèles $s_j/R = 0,1$ à $M_\infty = 4$ la totalité de la jupe est contenue dans la région deux.

Les strioscopies des planches 31, 32 et 33 confirment l'influence du nombre de Mach M_∞ et de la longueur de la génératrice du cône s_j sur la position du point I d'interaction des deux chocs.

Dans tous les cas expérimentés, les répartitions de pression pariétale obtenues à partir de la méthode des caractéristiques sont suffisamment voisines de celles calculées selon l'expression de Newton-Buseman pour que l'on puisse utiliser cette expression analytique dans les calculs des paramètres de l'écoulement extérieur à la couche limite.

On doit encore faire une remarque, concernant les variations de l'entropie dans la couche de choc des modèles $\frac{s_j}{R} \neq 0$. Le choc AI est d'intensité suffisamment faible ($\frac{\Delta p}{p} \sim 0$) pour que l'on puisse négliger la variation d'entropie qui en résulte ($\Delta s \sim (\Delta p)^3$). Dans ces conditions au-dessous de la ligne de courant issue du point I l'écoulement est isentropique et irrotationnel ; la valeur de l'entropie dans cette zone étant égale à celle obtenue derrière le choc conique. On a porté sur les figures 34, 35 et 36 la ligne de courant obtenue à partir de la méthode des caractéristiques de cette zone isentropique, dans le cas $M_\infty = 4$; 7 et 10 ; on peut constater que l'épaisseur de cette couche est une fonction décroissante de l'abscisse curviligne et du nombre de Mach. Un calcul simple basée sur la conservation du débit masse entrant par le choc conique donne des résultats analogues avec ceux obtenus par la méthode des caractéristiques.

La figure 37 présente un exemple du réseau des caractéristiques, dans le plan méridien, de l'écoulement autour du modèle $\frac{s_j}{R} = 0{,}1$ et $M_\infty = 10$ dans les régions 2 et 3 ; l'accumulation des caractéristiques réfléchies au voisinage du point B traduit une variation du gradient des grandeurs thermodynamiques, variation qui tend à s'atténuer lorsqu'on s'éloigne à l'aval de ce point. On a porté sur la figure 38 les évolutions à la paroi, du gradient longitudinal de pression, en fonction de l'abscisse curviligne, déduites de la méthode des caractéristiques et de la relation de Newton-Buseman. Celle déduite de la méthode des caractéristiques met bien en évidence, à partir du point B, une fluctuation, dans les valeurs du gradient, relativement importante située de part et d'autre de la courbe

obtenue à partir de la relation de Newton-Buseman. De la même façon (figure 39), les variations du gradient de pression transversal à la paroi représentées aussi en fonction de l'abscisse curviligne deviennent importantes et restent autour d'une position moyenne définie par la courbe $(\frac{\partial p}{\partial y})_{y=o} = - (\frac{\rho u^2}{R})_{y=o}$. Les isobares (figure 40) qui sont dans l'ensemble représentées par des droites accusent aussi la fluctuation de pression au passage à travers l'onde réfléchie de détente.

En ce qui concerne l'efficacité des entrées d'air à corps centraux $\frac{s_j}{R} \neq 0$, calculée dans une section droite d'abscisse $\frac{s - s_j}{R} = 0,3$ et à $M_\infty = 4$, en supposant comme dans le cas précédent que l'onde de choc droite est attachée à la lèvre de carène (régime critique) elle est, au voisinage de la paroi, égale à celle des entrées d'air à corps centraux $\frac{s_j}{R} = 0$. Par contre l'homogénéité de l'écoulement dans la section droite de l'entrée du compresseur dépend du nombre de Mach : à $M_\infty = 4$ la couche d'entropie constante à l'abscisse $\frac{s - s_j}{R} = 0,3$, est d'épaisseur relativement importante devant celle où l'entropie varie, à $M_\infty = 10$ au contraire l'épaisseur de la couche d'entropie constante devient négligeable, de sorte que lorsque le nombre de Mach augmente on se rapproche de plus en plus de la structure de la couche de choc obtenue sur les corps $\frac{s_j}{R} = 0$.

Enfin, en considérant deux entrées d'air, l'une à corps central $\frac{s_j}{R} \neq 0$ présentant à un nombre de Mach donné, par exemple $M_\infty = 4$, les caractéristiques d'une entrée d'air qu'on pourrait croire idéale : régime critique, onde de choc conique attachée à

la pointe du cône de demi-angle au sommet donné $\sigma = 7°$ et intersectant la lèvre de carène, avec les ondes de compression issues des génératrices circulaires, d'efficacité 0,273, pour R = 300 mm, l'autre à corps central $\frac{s_j}{R} = 0$, de même rayon de courbure R=300mm placée en avant de la carène de telle manière que le choc circulaire attaché à la pointe vienne intersecter la lèvre de carène et que le débit d'air à l'entrée soit égal à celui de l'entrée d'air précédente, d'efficacité moyenne 0,340, compte tenue de l'hétérogénéité de l'écoulement, soit de l'ordre de 20 % plus élevée que l'efficacité de la prise d'air précédente, on voit que pour un débit d'air donné, le manque d'homogénéité des corps $\frac{s_j}{R} = 0$ est compensé par un gain notable d'efficacité.

5.2. Etude théorique de l'écoulement visqueux

L'étude de la couche limite développée sur des surfaces concaves, c'est-à-dire en présence d'un gradient de pression longitudinal positif a fait l'objet de nombreux travaux notamment Murphy, Yen et Toba, Van Dyke, Schultz-Grunwow, Cohen - Reshotko. Tous ces auteurs ont appliqué aux équations de Navier - Stokes l'approximation de Prandtl, c'est-à-dire que dans la couche limite es forces d'inertie et les forces de viscosité sont du même ordre de grandeur, ce qui conduit à $\frac{\delta}{R} \sim \frac{1}{(\mathcal{R}_{eR})^{1/2}}$ le nombre de Reynolds $\mathcal{R}eR$ calculé avec les grandeurs locales étant rapporté au rayon de courbure R de la méridienne. Exception faite pour Cohen-Reshotko qui fixent arbitrairement le gradient de pression positif, ces auteurs, partant de la remarque qu'une diminution du rayon R entraine une diminution du Reynolds

donc une augmentation de $\frac{\delta}{R}$, concluent qu'il est nécessaire, dans une plus grande approximation du calcul de la couche limite, de tenir compte des termes d'ordre $\frac{\delta}{R}$ dans les équations de Navier - Stokes.

L'étude de l'écoulement non visqueux exposée dans les chapitres précédents permet de compléter les remarques d'ordre général sur le comportement de l'épaisseur relative de la couche limite $\frac{\delta}{R}$. En effet, comme le montre l'exemple donné fig.41 si une diminution du rayon de courbure entraine une augmentation de $\frac{1}{(\mathcal{R}e\ R)^{1/2}} \sim \frac{\delta}{R}$, celle-ci relativement faible, $\mathcal{R}e$ croît lorsque R diminue, s'atténue le long des méridiennes des modèles étudiés, tandis que pour un rayon de courbure donné, $\frac{1}{(\mathcal{R}e\ R)^{1/2}}$ est une fonction décroissante de l'abscisse curviligne s. Quoi qu'il en soit, dans tous les cas envisagés, $\frac{1}{(\mathcal{R}e\ R)^{1/2}}$ reste inférieur à 10^{-3} sauf pour de faibles rayons de courbure et au voisinage de la pointe où il est bien évident que $(\frac{1}{\mathcal{R}e\ R})^{1/2}$ ne représente pas l'épaisseur relative $\frac{\delta}{R}$.

Le nombre de Reynolds local $\mathcal{R}e$ rapporté à l'unité de longueur est approximativement une fonction linéaire de l'abscisse curviligne s. En supposant que l'épaisseur relative de la couche limite $\frac{\delta(s)}{s}$ est du même ordre de grandeur que $(\frac{1}{\mathcal{R}e\ s})^{1/2}$ et en définissant le nombre de Reynolds $\mathcal{R}e.\ s$ rapporté à l'abscisse soit par le produit de la valeur de $\mathcal{R}e$ local par l'abscisse s correspondante, soit par $\mathcal{R}e\ .\ s = \int_0^s \mathcal{R}e\ ds$, l'épaisseur δ (s) de la couche limite sur les corps concaves est une fonction croissante tendant vers une limite finie. Si on compare cette épaisseur $\delta(s)$ à celle obtenue sur un cône de demi-angle

d'ouverture égal au demi-angle au sommet du modèle, $\frac{\delta s}{\delta cône}$ est inférieur à 1.

Ces remarques nous permettent de conclure que si les considérations d'ordre général énoncées, par les auteurs cités ci-dessus, sur les ordres de grandeur de $\frac{\delta}{R}$ sont confirmés par les résultats de l'exploitation des données de l'écoulement non visqueux, il n'en reste pas moins vrai que les accroissements de $\frac{\delta}{R}$ ne sont pas suffisants. Dans la suite, il ne sera donc tenu compte que des termes d'ordre 1, ce qui, comme on le sait, simplifie la résolution des équations de la couche limite.

Avant de passer à l'étude proprement dite de la couche limite, on peut encore faire une remarque importante : un calcul simple montre que les variations de $\frac{\delta}{R}$ en fonction du gradient de pression transversal $(-\frac{\partial p}{\partial y})$ s'expriment sous la forme suivante :

$$\frac{\delta}{R} \sim \left(\frac{1}{Re \; R}\right)^{1/2} = K \cdot \frac{1}{\left(-\frac{\partial p}{\partial y}\right)^{0,3}}$$

où K est un paramètre dépendant des conditions initiales de l'écoulement gazeux et du rayon de courbure R. On voit donc la part importante du gradient de pression transversal sur l'épaisseur relative $\frac{\delta}{R}$. La figure 42 reproduit le graphe de la fonction $\left(\frac{1}{Re \cdot R}\right)^{1/2} = f\left(-\frac{\partial p}{\partial y}\right)^{-0,3}$ dans le cas particulier M = 7, T_o = 600°K et p_o = 8 bars et pour R_o = 12,20 et 30 cm.

5.2.1. Equations générales de Navier-Stokes

On a adopté un système de coordonnées curvilignes triorthogonales. Si on considère les trois familles indépendantes de surfaces orthogonales $f_1(x,y,z) = \alpha$, $f_2(x,y,z) = \beta$, $f_3(x,y,z) = \gamma$, où x,y,z sont les coordonnées cartésiennes, les surfaces α = constante, β = constante et γ = constante forment un système orthogonal ; les valeurs α , β ,γ peuvent être utilisées comme les coordonnées d'un point de l'espace. Les relations entre les deux systèmes de coordonnées x,y,z et α , β , γ peuvent être exprimées aussi par les relations $x = x(\alpha,\beta,\gamma)$, $y = y\ (\alpha,\beta,\gamma)$, $z = z\ (\alpha,\beta,\gamma)$ (47).

L'élément de longueur curviligne $ds = (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{1/2}$ s'exprime alors en fonction des coordonnées orthogonales α, β, γ , de la façon suivante : $ds\ (h_1^2\ d\alpha^2,\ h_2^2\ d\beta^2,\ h_3^2\ d\gamma^2)^{1/2}$ avec

$$h_1 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2 \right]^{1/2}$$

$$h_2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)^2 \right]^{1/2} \qquad (5.53)$$

$$h_3 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \gamma}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \gamma}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \gamma}\right)^2 \right]^{1/2}$$

On voit que les éléments de longueur dans les directions croissantes α, β et γ sont respectivement $h_1\ d\alpha$, $h_2\ d\beta$ et $h_3\ d\gamma$. Les équations de la couche limite seront établies dans le système d'axes ainsi défini.

Si on veut appliquer les hypothèses classiques de la couche limite aux équations de Navier-Stokes, on sait qu'il faut considérer le système d'axes de référence choisi en mouve-

ment par rapport au solide sur la surface duquel se développe la couche limite.

5.2.1.1. Equations de continuité

Si $\vec{q}'$ est le vecteur vitesse de l'écoulement stationnaire relatif aux axes mobiles (α,β,γ) dont les composantes dans la direction α, β, γ sont respectivement q'_α , q'_β , q'_γ l'équation de continuité écrite dans le système de coordonnées α , β , γ s'exprime de la manière suivante :

$$\text{div}\ \rho\vec{q}' = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(\rho q'_\alpha\, h_2h_3) + \frac{\partial}{\partial\beta}(\rho q'_\beta\, h_3h_1) + \frac{\partial}{\partial\gamma}(\rho q'_\gamma\, h_1h_2)\right] \qquad (5.54)$$

5.2.1.2. Equations de conservation de la quantité de mouvement

Si q_α, q_β et q_γ sont les composantes de la vitesse absolue de l'écoulement en un point (α,β,γ) lié au solide X,Y,Z les composantes de la résultante des forces de volume ou forces extérieures, et F_α, F_β, F_γ les composantes de la résultante des forces de surfaces, les équations de conservation de la quantité de mouvement, en stationnaire , en projection sur les axes curvilignes α, β, γ peuvent s'écrire respectivement de la manière suivante :

$$\rho\frac{dq_\alpha}{dt} = X + F_\alpha \qquad (a)$$

$$\rho\frac{dq_\beta}{dt} = Y + F_\beta \qquad (b) \qquad (5.55)$$

$$\rho\frac{dq_\gamma}{dt} = Z + F_\gamma \qquad (c)$$

Si à chaque instant l'origine des axes en mouvement coïncide avec celle des axes fixes et si les axes mobiles ont uniquement des vitesses angulaires ω_α, ω_β , ω_γ , alors les contributions convectives qui sont les accélérations absolues $\frac{dq_\alpha}{dt}$, $\frac{dq_\beta}{dt}$, $\frac{dq_\gamma}{dt}$ s'écrivent de la façon suivante :

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{dq'_\alpha}{dt} - q'_\beta \cdot\omega_\gamma + q'_\gamma \cdot\omega_\beta \quad (a)$$

$$\frac{dq_\beta}{dt} = \frac{dq'_\beta}{dt} - q'_\gamma \cdot\omega_\alpha + q'_\alpha \cdot\omega_\gamma \quad (b) \qquad (5.56)$$

$$\frac{dq_\gamma}{dt} = \frac{dq'_\gamma}{dt} - q'_\alpha \cdot\omega_\beta + q'_\beta \cdot\omega_\alpha \quad (c)$$

où q'_α , q'_β et q'_γ sont les composantes de la vitesse de l'écoulement, en un point, relative au solide et

$$\frac{d}{dt} = q'_\alpha \frac{\partial}{h_1 \partial\alpha} + q'_\beta \frac{\partial}{h_2 \partial\beta} + q'_\gamma \frac{\partial}{h_3 \partial\gamma} \qquad (5.57)$$

De plus :

$$\omega_\alpha = -\frac{1}{h_2}\left(\frac{\partial h_3}{\partial\beta}\right)\frac{d\gamma}{dt} - \frac{1}{h_3}\left(\frac{\partial h_2}{\partial\gamma}\right)\frac{d\beta}{dt} \quad (a)$$

$$\omega_\beta = \frac{1}{h_3}\left(\frac{\partial h_1}{\partial\gamma}\right)\frac{d\alpha}{dt} - \frac{1}{h_1}\left(\frac{\partial h_3}{\partial\alpha}\right)\frac{d\gamma}{dt} \quad (b) \qquad (5.58)$$

$$\omega_\gamma = \frac{1}{h_1}\left(\frac{\partial h_2}{\partial\alpha}\right)\frac{d\beta}{dt} - \frac{1}{h_2}\left(\frac{\partial h_1}{\partial\beta}\right)\frac{d\alpha}{dt} \quad (c)$$

avec $\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{h_3} q'_\gamma$, $\frac{d\beta}{dt} = \frac{1}{h_2} q'_\beta$ et $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{h_1} q'_\alpha$

On peut choisir convenablement le volume de contrôle tel que la résultante des forces extérieures soit nulle, par suite X=0, Y=0, Z=0. Dans ces conditions les composantes des

forces de surfaces calculées dans le système de référence mobile (α,β,γ) s'écrivent respectivement sous la forme suivante :

$$F_\alpha = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(h_2h_3\sigma_\alpha) + \frac{\partial}{\partial\beta}(h_3h_1\tau_{\beta\alpha}) + \frac{\partial}{\partial\gamma}(h_1h_2\tau_{\gamma\alpha})\right]$$

$$+ \tau_{\alpha\beta}\frac{1}{h_1h_2}\frac{\partial h_1}{\partial\beta} + \tau_{\gamma\alpha}\frac{1}{h_1h_3}\frac{\partial h_1}{\partial\gamma} - \frac{\sigma_\beta}{h_1h_2}\frac{\partial h_2}{\partial\alpha} - \frac{\sigma_\alpha}{h_1h_3}\frac{\partial h_3}{\partial\alpha} \quad (a)$$

$$F_\beta = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(h_2h_3\tau_{\alpha\beta}) + \frac{\partial}{\partial\beta}(h_3h_1\sigma_\beta) + \frac{\partial}{\partial\gamma}(h_1h_2\tau_{\gamma\beta})\right] \quad (5.59)$$

$$+\tau_{\beta\gamma}\frac{1}{h_2h_3}\frac{\partial h_2}{\partial\gamma} + \tau_{\alpha\beta}\frac{1}{h_2h_1}\frac{\partial h_2}{\partial\alpha} - \frac{\sigma_\gamma}{h_2h_3}\frac{\partial h_3}{\partial\beta} - \sigma_\alpha\frac{1}{h_2h_1}\frac{\partial h_1}{\partial\beta} \quad (b)$$

$$F_\gamma = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(h_2h_3\tau_{\alpha\gamma}) + \frac{\partial}{\partial\beta}(h_3h_1\tau_{\beta\gamma}) + \frac{\partial}{\partial\gamma}(h_1h_2\sigma_\gamma)\right]$$

$$+\tau_{\gamma\alpha}\frac{1}{h_1h_3}\frac{\partial h_3}{\partial\alpha} + \tau_{\beta\gamma}\frac{1}{h_3h_2}\frac{\partial h_3}{\partial\beta} - \sigma_\alpha\frac{1}{h_3h_1}\frac{\partial h_1}{\partial\gamma} - \sigma_\beta\frac{1}{h_3h_2}\frac{\partial h_2}{\partial\gamma} \quad (c)$$

σ dénote les forces normales ou forces perpendiculaires à la surface considérée : σ_α est la force normale sur la surface perpendiculaire à l'axe des α . τ est la force de frottement ou force tangente à la surface considérée ; le premier indice se réferre à la direction de l'axe perpendiculaire à la surface considérée, le second indice à la direction de la force dans la surface.

On démontre que les forces normales et les forces de frottement sont liées, en première approximation aux déformations de la vitesse par les relations suivantes :

$$\sigma_\alpha = -p + 2\mu\, e_\alpha + \lambda \operatorname{div} \vec{q}' \quad (a) \quad ; \tau_{\beta\gamma} = \tau_{\gamma\beta} = \mu .\, e_{\beta\gamma} \quad (d)$$

$$\sigma_\beta = -p + 2\mu\, e_\beta + \lambda \operatorname{div} \vec{q}' \quad (b) \quad ; \tau_{\gamma\alpha} = \tau_{\alpha\gamma} = \mu .\, e_{\gamma\alpha} \quad (e) \qquad (5.60)$$

$$\sigma_\gamma = -p + 2\mu\, e_\gamma + \lambda \operatorname{div} \vec{q}' \quad (c) \quad ; \tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha} = \mu .\, e_{\alpha\beta} \quad (f)$$

les expressions des déformations de vitesse e sont données par analogie avec les déformations élastiques de la forme du corps solide ; elles sont les suivantes :

$$e_\alpha = \frac{1}{h_1} \frac{\partial q'_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{q_\beta}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \beta} + \frac{q_\gamma}{h_3 h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \gamma} \qquad (a)$$

$$e_\beta = \frac{1}{h_2} \frac{\partial q'_\beta}{\partial \beta} + \frac{q_\gamma}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \gamma} + \frac{q_\alpha}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \alpha} \qquad (b)$$

$$e_\gamma = \frac{1}{h_3} \frac{\partial q'_\gamma}{\partial \gamma} + \frac{q_\alpha}{h_3 h_1} \frac{\partial h_3}{\partial \alpha} + \frac{q'_\beta}{h_2 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial \beta} \qquad (c) \qquad (5.61)$$

$$e_{\beta\gamma} = \frac{h_3}{h_2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{q'_\gamma}{h_3}\right) + \frac{h_2}{h_3} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{q'_\beta}{h_2}\right) \qquad (d)$$

$$e_{\gamma\alpha} = \frac{h_1}{h_3} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{q'_\alpha}{h_1}\right) + \frac{h_3}{h_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{q'_\gamma}{h_3}\right) \qquad (e)$$

$$e_{\alpha\beta} = \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{q'_\beta}{h_2}\right) + \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{q'_\alpha}{h_1}\right) \qquad (f)$$

Le premier indice des tensions de déformatior se rapporte à la direction de la normale à la surface considérée alors que le second indice se réferre à la direction de variation de vitesse ; ainsi $e_{\alpha\beta}$ dénote la composante le long de β de la tension de frottement dans la surface perpendiculaire à α.

On suppose que $3\lambda + 2\mu = 0$ approximativement faite en dynamique des gaz.

5.2.1.3. Equation de conservation de l'énergie

Dans le système de coordonnées curviligne général, l'équation de conservation de l'énergie s'écrit, dans le cas où il n'y a pas apport de chaleur venant de l'extérieur du système et dans un écoulement stationnaire, sous la forme suivante :

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = \frac{dp}{dt} + \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1} K \frac{\partial T}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2} K \frac{\partial T}{\partial\beta}\right) + \frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3} K \frac{\partial T}{\partial\gamma}\right)\right] + \Phi \qquad (5.62)$$

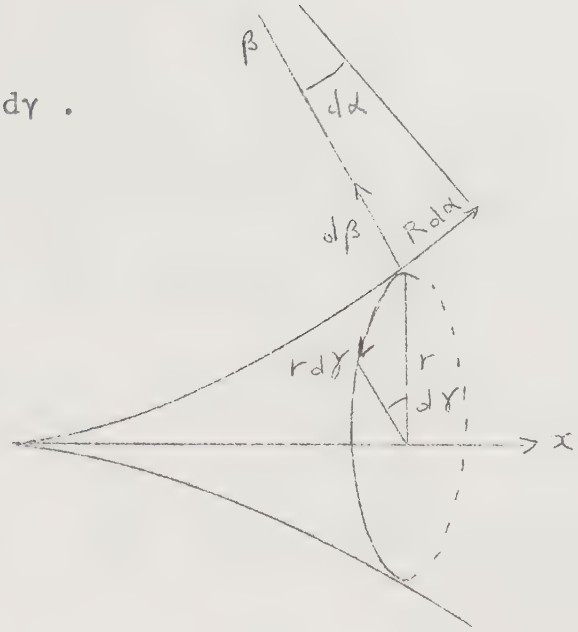
avec $\frac{d}{dt} = q'_\alpha \frac{\partial}{h_1 \partial\alpha} + q'_\beta \frac{\partial}{h_2 \partial\beta} + q'_\gamma \frac{\partial}{h_3 \partial\gamma}$; la fonction de dissipation est liée aux tensions de déformation par la relation suivante :

$$\Phi = \mu\left[2\left(e_\alpha^2 + e_\beta^2 + e_\gamma^2\right) + e_{\beta\gamma}^2 + e_{\gamma\alpha}^2 + e_{\alpha\beta}^2\right] + \lambda(e_\alpha + e_\beta + e_\gamma)^2 \qquad (5.63)$$

5.2.2. Application à l'écoulement autour du corps de révolution à méridienne concave

Le système de coordonnées curvilignes triorthogonales est schématisé dans la figure ci-dessous, dans lequel : $R_{\alpha,\beta}d\alpha$ et $d\beta$représentent respectivement dans le plan méridien l'élément de longueur curviligne orienté le long d'une génératrice du corps et l'élément de longueur rectiligne normal à cette génératrice ; $r_{\alpha,\beta}\, d\gamma$ l'élément de longueur courbe perpendiculaire au plan méridien. Ainsi les éléments de longueur $R_{(\alpha,\beta)}d\alpha$ et $r_{(\alpha,\beta)}\, d\gamma$sont interceptés respectivement par les angles au

centre d α et dγ .



Le modèle de révolution est placé sans incidence dans l'écoulement de sorte que la composante q'_γ et ses dérivées dans les directions α, β, γ sont nulles. Dans ces conditions, les équations de continuité, de conservation de la quantité de mouvement en projection sur l'axe des α et sur l'axe des β , et de conservation de l'énergie s'écrivent (dans la suite, on a posé $q'_\alpha = u$, $q'_\beta = v$) :

$$\frac{\partial(\rho u r)}{\partial \alpha} + \frac{\partial(\rho v R r)}{\partial \beta} = 0$$

$$\rho\left[\frac{u}{R}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + v\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{uv}{R}\frac{\partial R}{\partial \beta}\right] = \frac{1}{rR}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(-pr + 2\mu\frac{r}{R}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + 2\mu v\frac{r}{R}\frac{\partial R}{\partial \beta}\right.\right.$$

$$\left. - \frac{2}{3}\mu\frac{1}{R}\frac{\partial ur}{\partial \alpha} - \frac{2}{3}\mu\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial \beta}(vrR)\right) + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\mu r\frac{\partial v}{\partial \alpha} + rR^2\mu\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{u}{R}\right)\right)\Bigg]$$

$$+ \frac{\mu}{R^2}\frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial R}{\partial \beta} + \mu\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{u}{R}\right)\frac{\partial R}{\partial \beta} + \frac{p}{rR}\frac{\partial r}{\partial \alpha} - \frac{2\mu}{r^2}\cdot\frac{u}{R^2}\left(\frac{\partial r}{\partial \alpha}\right)^2$$

$$- 2\mu\frac{v}{r^2R}\frac{\partial r}{\partial \alpha}\frac{\partial r}{\partial \beta} + \frac{2}{3}\mu\frac{1}{r^2R^2}\left(\frac{\partial ur}{\partial \alpha} + \frac{\partial vrR}{\partial \beta}\right)\frac{\partial r}{\partial \alpha} \qquad (a)$$

(5.64)

$$\rho\left[\frac{u}{R}\frac{\partial v}{\partial\alpha} + v\frac{\partial v}{\partial\beta} - \frac{u^2}{R}\frac{\partial R}{\partial\beta}\right] = \frac{1}{rR}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{r}{R}\mu\frac{\partial v}{\partial\alpha} + \mu rR\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u}{R}\right)\right)\right.$$

$$+ \frac{1}{rR}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(-rRp + 2rR\mu\frac{\partial v}{\partial\beta} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial ur}{\partial\alpha} + \frac{\partial vrR}{\partial\beta}\right)\right) + \frac{p}{R}\frac{\partial R}{\partial\beta} -$$

$$- \frac{2\mu}{R^2}\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial R}{\partial\beta} - \frac{2\mu v}{R^2}\left(\frac{\partial R}{\partial\beta}\right) + \frac{2}{3}\mu\frac{1}{rR^2}\frac{\partial ur}{\partial\alpha}\frac{\partial R}{\partial\beta} + \frac{2}{3}\mu\frac{1}{rR^2}\frac{\partial vrR}{\partial\beta}\frac{\partial R}{\partial\beta} + \tag{b}$$

$$\left. + \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\beta}\left[p - 2\mu\left(\frac{u}{rR}\frac{\partial r}{\partial\alpha} + \frac{v}{r}\frac{\partial r}{\partial\beta}\right) + \frac{2}{3}\mu\frac{1}{rR}\left(\frac{\partial ur}{\partial\alpha} + \frac{\partial vrR}{\partial\beta}\right)\right]\right]$$

$$\rho\frac{u}{R}\frac{\partial H}{\partial\alpha} + \rho v\frac{\partial H}{\partial\beta} = \frac{u}{R}\frac{\partial p}{\partial\alpha} + v\frac{\partial p}{\partial\beta} + \frac{1}{rR}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(K\frac{r}{R}\frac{\partial T}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(KrR\frac{\partial T}{\partial\beta}\right)\right]$$

$$+\mu\left[2\left(\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{v}{R}\frac{\partial R}{\partial\beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial\beta}\right)^2 + \left(\frac{u}{rR}\frac{\partial r}{\partial\alpha}\right)^2 + \left\{\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial\alpha} + R\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u}{R}\right)\right\}^2\right]$$

$$- \frac{2}{3}\mu\left(\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{v}{R}\frac{\partial R}{\partial\beta} + \frac{\partial v}{\partial\beta} + \frac{u}{rR}\frac{\partial r}{\partial\alpha}\right)^2 \tag{c}$$

5.2.3. Estimation des ordres de grandeur

Dans le but d'écrire les équations précédentes sous une forme adimensionnelle, il convient de poser les égalités suivantes :

$$\bar{u} = \frac{u}{U_o} \quad , \quad \bar{v} = \frac{v}{V_o} \quad , \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_o} \quad , \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_o} \quad , \quad \bar{k} = \frac{k}{k_o}$$

$$\bar{p} = \frac{p}{p_o} \quad , \quad \bar{\beta} = \frac{\beta}{\delta} \quad , \quad \bar{r} = \frac{r}{R_o} \quad , \quad \bar{R} = \frac{R}{R_o}$$

avec de plus $\dfrac{p_o}{\frac{1}{2}\rho_o U_o^2}$ d'ordre unité, $\dfrac{\delta^2}{R_o^2}$ d'ordre $\dfrac{1}{Re}$ et en supposant que $\dfrac{\partial R}{\partial\alpha}$ a une valeur finie.

Tout d'abord cherchons l'ordre de grandeur de u par

rapport à v ou de U_o par rapport à V_o ; pour cela on intègre l'équation de continuité en prenant comme conditions aux limites pour $\beta = 0$, $v = 0$ et pour $\beta = \delta$, $v = V_o$, il vient :

$$\rho_o V_o R_o^2 = - \int_o^{\delta} \frac{\partial \rho u r}{\partial \alpha} d\beta$$

$$\rho_o V_o R_o^2 = - (\rho_o U_o R_o \delta) \int_o^1 \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u} \bar{r}}{\partial \alpha} d\bar{\beta}$$

soit

$$\frac{V_o}{U_o} = - \frac{\delta}{R_o} \int_o^1 \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u} \bar{r}}{\partial \alpha} d\bar{\beta}$$

La quantité entre crochet étant d'ordre unité $\frac{V_o}{U_o}$ est d'ordre $\frac{\delta}{R_o}$ d'où $V_o << U_o$.

Ecrivons, à présent, les ordres de grandeur des différents termes de l'équation de quantité de mouvement (5.62.a) :

$$\rho \frac{u}{R} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \sim \frac{\rho_o U_o^2}{R_o} \quad ; \quad \rho v \frac{\partial u}{\partial \beta} \sim \frac{\rho_o U_o V_o}{\delta} \quad ; \quad \rho \frac{uv}{R} \sim \frac{\rho_o U_o V_o}{R_o} \quad ;$$

$$\frac{2}{rR} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{r}{R} \mu \frac{\partial u}{\partial \alpha}\right) \sim 2 \frac{\mu_o U_o}{R_o^2} \quad ; \quad \frac{2}{rR} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{r}{R} \mu v\right) \sim \frac{\mu_o V_o}{R_o} \quad ;$$

$$\frac{2}{3rR} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\mu}{R} \frac{\partial u r}{\partial \alpha}\right) \sim \frac{\mu_o U_o}{R_o^2} \quad ; \quad \frac{2}{3rR} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\mu}{R} \frac{\partial v r R}{\partial \beta}\right) \sim \frac{\mu_o V_o}{R_o \delta} \quad ;$$

$$\frac{1}{rR} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\mu r \frac{\partial v}{\partial \alpha}\right) \sim \frac{\mu_o V_o}{R_o \delta} \quad ; \quad \frac{1}{rR} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[r R^2 \mu \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{R}\right)\right] \sim \frac{\mu_o U_o}{\delta^2} \quad ;$$

$$\frac{\mu}{R^2} \frac{\partial V}{\partial \alpha} \sim \frac{\mu_o V_o}{R_o^2} \quad ; \quad \mu \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{R}\right) \sim \frac{\mu_o U_o}{R_o \delta} \quad ; \quad \frac{2\mu u}{r^2 R^2} \left(\frac{\partial r}{\partial \alpha}\right)^2 \sim \frac{\mu_o U_o}{R_o^2} \quad ;$$

$$\frac{2}{3} \mu \frac{1}{r^2 R^2} \frac{\partial u r}{\partial \alpha} \frac{\partial r}{\partial \alpha} \sim \frac{\mu_o U_o}{R_o^2} \quad \text{et} \quad \frac{2}{3} \mu \frac{1}{r^2 R^2} \frac{\partial v R r}{\partial \beta} \frac{\partial r}{\partial \alpha} \sim \frac{\mu_o V_o}{R_o \delta}$$

soit en divisant chacun de ces termes par $\frac{\rho_o U_o^2}{R_o}$ on obtient les ordres de grandeur suivants :

$$\rho \frac{u}{R} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \sim O(1) \; ; \; \rho v \frac{\partial u}{\partial \beta} \sim O(1) \; ; \; \frac{\rho u v}{R} \sim O\left(\frac{\delta}{R_o}\right) \; ;$$

$$\frac{2}{rR} \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{r}{R} \mu \frac{\partial u}{\partial \alpha}\right) \sim O\left(\frac{\delta^2}{R_o^2}\right) \; ; \; \frac{2}{rR} \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{r}{R} \mu v\right) \sim O\left(\frac{\delta^3}{R_o^3}\right) \; ;$$

$$\frac{2}{3} \frac{1}{rR} \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\mu}{R} \frac{\partial ur}{\partial \alpha}\right) \sim O\left(\frac{\delta^2}{R_o^2}\right) \; ; \; \frac{2}{3rR} \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\mu}{R} \frac{\partial vrR}{\partial \beta}\right) \sim O\left(\frac{\delta^2}{R_o^2}\right)$$

$$\frac{1}{rR} \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\mu r \frac{\partial v}{\partial \alpha}\right) \sim O\left(\frac{\delta^2}{R_o^2}\right) \; ; \; \frac{1}{rR} \frac{\partial}{\partial \beta}\left[rR^2 \mu \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{u}{R}\right)\right] \sim O(1) \; ;$$

$$\frac{\mu}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \sim O\left(\frac{\delta^3}{R_o^3}\right) \; ; \mu \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{u}{R}\right) \sim O\left(\frac{\delta}{R_o}\right) \; ; \; \frac{2\mu u}{rR^2}\left(\frac{\partial r}{\partial \alpha}\right)^2 \sim O\left(\frac{\delta^2}{R_o^2}\right) \; ;$$

$$\frac{2}{3} \mu \frac{1}{r^2 R^2} \frac{\partial ur}{\partial \alpha} \frac{\partial r}{\partial \alpha} \sim O\left(\frac{\delta^2}{R^2}\right) \; ; \; \frac{2}{3} \mu \frac{1}{r^2 R^2} \frac{\partial vRr}{\partial \beta} \frac{\partial r}{\partial \alpha} \sim O\left(\frac{\delta^2}{R_o^2}\right)$$

En opérant de la même manière que précédemment dans l'équation (5.62.b) on obtient les ordres de grandeur suivants :

$$\rho \frac{u}{R} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \sim O(1) \; ; \; \rho v \frac{\partial v}{\partial \beta} \sim O(1) \; ; \rho \frac{u^2 \partial R}{R \partial \beta} \sim O\left(\frac{R_o^2}{\delta^2}\right) \; ;$$

$$\frac{1}{rR} \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{r}{R} \mu \frac{\partial v}{\partial \alpha}\right) \sim O\left(\frac{\delta^2}{R_o^2}\right) \; ; \; \frac{1}{rR} \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\mu u R \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{u}{R}\right)\right) \sim O(1) \; ;$$

$$; \; \frac{1}{rR} \frac{\partial}{\partial \beta}\left(2rR\mu \frac{\partial v}{\partial \beta}\right) \sim O(1) ; \frac{1}{rR} \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{2}{3} \mu \frac{\partial ur}{\partial \alpha}) \sim O(1) ;$$

$$\frac{1}{rR} \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{2}{3} \mu \frac{\partial vrR}{\partial \beta}\right) \sim O(1) \; ; \; \frac{r}{R} \sim O\left(\frac{R_o}{\delta}\right) \; ; \; \frac{2\mu}{R^2} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \sim O\left(\frac{\delta}{R}\right) \; ;$$

$$\frac{2\mu v}{R^2} \sim O\left(\frac{\delta^2}{R_o^2}\right) \; ; \; \frac{2}{3} \mu \frac{1}{rR^2} \frac{\partial ur}{\partial \alpha} \sim O\left(\frac{\delta}{R}\right) \; ; \; -\frac{2}{3} \mu \frac{1}{rR^2} \frac{\partial vrR}{\partial \beta} \sim O\left(\frac{\delta}{R}\right)$$

Enfin les ordres de grandeur des différents termes dans l'équation (5.62.c) sont les suivants : ($dH = C_p\, dT$)

$$\rho \frac{u}{R} C_p \frac{\partial T}{\partial \alpha} \sim O(1) \; ; \; \rho v\, C_p \frac{\partial T}{\partial \beta} \sim O(1) \; ; \; \frac{u}{R} \frac{\partial p}{\partial \alpha} \sim O(1) \; ; \; v \frac{\partial p}{\partial \beta} \sim O\left(\frac{\delta}{R}\right)$$

$$\frac{1}{rR} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(K \frac{r}{R} \frac{\partial T}{\partial \alpha}\right) \sim O\left(\frac{\delta}{R_o}^2\right) \; ; \; \frac{1}{rR} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(KrR \frac{\partial T}{\partial \beta}\right) \sim O(1)$$

$$2\mu \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2 \sim O\left(\frac{\delta^2}{R_o^2}\right) \; ; \; 2\mu \frac{v^2}{R^2} \sim O\left(\frac{\delta^4}{R_o^4}\right) \; ; \; 4\mu \frac{v}{R^2} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \sim O\left(\frac{\delta^3}{R_o^3}\right) \; ;$$

$$2\mu \left(\frac{\partial v}{\partial \beta}\right)^2 \sim O\left(\frac{\delta^2}{R_o^2}\right) \; ; \; 2\mu \left(\frac{u}{rR} \frac{\partial r}{\partial \alpha}\right)^2 \sim O\left(\frac{\delta^2}{R_o^2}\right) \; ; \; 2\mu \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)^2 \sim O\left(\frac{\delta^4}{R_o^4}\right)$$

$$\mu R^2 \left[\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{R}\right)\right]^2 \sim O(1) \; ; \; 2\mu \frac{\partial v}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{R}\right) \sim O\left(\frac{\delta^2}{R_o^2}\right)$$

$$\frac{2}{3}\mu \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2 \sim O\left(\frac{\delta^2}{R_o^2}\right) \; ; \; \frac{2}{3}\mu \frac{v^2}{R^2} \sim O\left(\frac{\delta^4}{R_o^4}\right) \; ; \; \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial v}{\partial \beta}\right)^2 \sim O\left(\frac{\delta^2}{R_o^2}\right) \; ;$$

$$\frac{2}{3} \mu \left(\frac{u}{rR} \frac{\partial r}{\partial \alpha}\right)^2 \sim O\left(\frac{\delta^2}{R_o^2}\right) \; ; \; \frac{4}{3} \mu \frac{v}{R^2} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \sim O\left(\frac{\delta^3}{R_o^3}\right) \; ;$$

$$\frac{4}{3} \mu \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} \sim O\left(\frac{\delta^2}{R_o^2}\right) \; ; \; \frac{4}{3} \mu \frac{u}{rR^2} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial r}{\partial \alpha} \sim O\left(\frac{\delta^2}{R_o^2}\right) \; ;$$

$$\frac{4}{3} \mu \frac{v}{R} \frac{\partial v}{\partial \beta} \sim O\left(\frac{\delta^3}{R_o^3}\right) \; ; \; \frac{4}{3} \mu \frac{uv}{rR^2} \frac{\partial r}{\partial \alpha} \sim O\left(\frac{\delta^3}{R_o^3}\right)$$

5.2.4. Equations de la couche limite

En appliquant le concept de Prandtl : l'épaisseur de la zone où interviennent les phénomènes de dissipation est considérée comme mince ($\delta(\alpha) << \alpha$) ; on peut négliger, dans

les équations générales de Navier-Stokes, les termes d'ordre $\frac{\delta}{R_o}$ et d'ordre supérieur à $\frac{\delta}{R_o}$ devant les termes d'ordre unité (négliger dans l'équation (5.62.b) les termes d'ordre $\frac{R_o}{\delta}$, d'ordre 1, d'ordre $\frac{\delta}{R_o}$ et d'ordre supérieur à $\frac{\delta}{R_o}$ devant les termes d'ordre $\frac{R_c}{\delta^2}$ revient à négliger les termes d'ordre $\frac{\delta}{R_o}$ et d'ordre supérieur à $\frac{\delta}{R_o}$ devant les termes d'ordre 1).

D'autre part, l'hypothèse de la couche limite mince permet de confrondre la distance $r_{\alpha\beta}$ d'un point dans la couche limite à l'axe de révolution du corps avec la distance r d'un point du corps à l'axe ; ce qui entraîne l'égalité $\frac{\partial r}{\partial \beta} = 0$. Enfin la distance $R_{\alpha\beta}$ du centre de courbure de la génératrice du corps à un point dans la couche limite est égale au rayon de courbure R_α de la génératrice diminuéde l'ordonnée β; soit

$R_{\alpha\beta} = R_\alpha - \beta$, ce qui conduit à $\frac{\partial R}{\partial \beta} = -1$.

De l'hypothèse et de la remarque précédente on peut déduite les équations de la couche limite.

L'équation de continuité reste inchangée

$$\frac{\partial \rho u r}{\partial \alpha} + \frac{\partial \rho v r R}{\partial \beta} = 0 \qquad (5.65)$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement (5.62.a) s'écrit :

$$\rho \frac{u}{R} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \rho v \frac{\partial u}{\partial \beta} = -\frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \alpha} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\mu R^2 \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{R} \right) \right] \qquad (5.65a)$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement (5.62.b) se réduit à :

$$\frac{\partial p}{\partial \beta} = - \frac{\rho u^2}{R} \qquad (5.65b)$$

L'équation de l'énergie (5.62.c) se simplifie également pour donner :

$$\rho\, u\, C_p \frac{\partial T}{\partial \alpha} + \rho v\, R\, C_p \frac{\partial T}{\partial \beta} = u \frac{\partial p}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(kR \frac{\partial T}{\partial \beta}\right) + \mu R^3 \left[\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{u}{R}\right)\right]^2 \qquad (5.65c)$$

Rappelons qu'on a supposé que les valeurs de gradient de courbure $\frac{\partial R}{\partial \alpha}$ restent finies ; c'est le cas sur les génératrices circulaires des modèles $\frac{s_j}{R} = 0$, tandis que sur les génératrices des modèles $\frac{s_j}{R} \neq 0$, au raccordement cône-jupe $\frac{\partial R}{\partial \alpha}$ passe d'une valeur indéterminée sur le cône, à une valeur finie sur la jupe, de sorte que dans ce dernier cas les approximations faites dans les termes comportant le gradient de courbure $\frac{\partial R}{\partial \alpha}$, ne sont pas justifiées.

5.2.5. Recherche de solutions de similitude

Le système d'équations (5.56a) de la couche limite est un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires : il ne peut pas être résolu tel quel.

On se propose d'appliquer la méthode de recherche de solutions de similitude permettant de ramener les équations de la couche limite à des équations différentielles ordinaires : pour cela on remplace le système de coordonnées (α,β) par un système (ξ,η), lié à α et β , dans lequel les dérivées des

différents paramètres (u, p, T...) deviennent séparables.

Introduisons une fonction de courant ψ $(\alpha \cdot \beta)$ telle que :

$$\rho ur = \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \qquad \text{et} \quad \rho vrR = - \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \tag{5.66}$$

l'équation de continuité est ainsi automatiquement satisfaite. Cherchons pour ψ une solution à variables séparées α et η (α,β), η étant pour l'instant inconnu, écrite sous la forme suivante:

$$\psi = N(\alpha) \cdot f(\eta) \tag{5.67}$$

il vient : $$\rho vR = -\frac{1}{r}\left[N'f + Nf' \cdot \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \right] \quad \text{avec} \quad f' = \frac{\partial f}{\partial \eta} \tag{5.68}$$

et $$\rho u = \frac{1}{r} \cdot Nf' \cdot \frac{\partial \eta}{\partial \beta} \tag{5.69}$$

si, de plus, l'on pose :

$$u = u_e(\alpha) \cdot f'(\eta) \tag{5.70}$$

(5.69) et (5.70) permettent d'écrire :

$$\frac{\partial \eta}{\partial \beta} = \frac{\rho u_e r}{N}$$

soit $$\eta = \frac{u_e r}{N} \int_{\square}^{\beta} \rho d\beta \tag{5.71}$$

D'autre part, il vient :

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = f' \frac{du_e}{d\alpha} + u_e f'' \frac{\partial \eta}{\partial \alpha}$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial \beta} = u_e^2 f'' \rho r \frac{1}{N}$$

Compte tenu de ces transformations, l'équation de conservation de la quantité de mouvement (5.65a) qui s'écrit :

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \rho v R \frac{\partial u}{\partial \beta} = - \frac{\partial p}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta}\left[\mu R^2 \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{R}\right)\right]$$

peut se mettre sous la forme suivante :

$$\rho u_e f'^2 \frac{du_e}{d\alpha} + \rho u_e^2 f' f'' \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} - \frac{1}{r}\left(N' f + N f' \frac{\partial \eta}{\partial \alpha}\right) \frac{u_e^2 f'' \rho r}{N} =$$

$$\rho_e u_e \frac{du_e}{d\alpha} + \frac{\rho u_e^3 r^2}{N^2} \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\mu \rho R^2 \frac{\partial f'/R}{\partial \eta}\right)$$

avec $\quad \frac{dp_e}{d\alpha} = - \rho_e u_e \frac{du_e}{d\alpha}$

On peut constater que les termes en $\frac{\partial \eta}{\partial \alpha}$ s'éliminent et en multipliant les deux membres de l'équation précédente par $\frac{N}{N'} \cdot \frac{1}{\rho u_e^2}$, il vient :

$$\frac{1}{u_e} \frac{N}{N'} \frac{du_e}{d\alpha}\left[f'^2 - \frac{\rho_e}{\rho}\right] - f f'' \quad \frac{\rho_e \mu_e u_e r^2}{N' N} \frac{\partial}{\partial \eta}\left[C R^2 \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{f'}{R}\right)\right] \qquad (5.72)$$

avec $C = \frac{\rho \mu}{\rho_e \mu_e}$

En choisissant N tel que $\frac{\rho_e \mu_e u_e r^2 R}{N' N} = 1$

soit $N^2 = 2 \int_0^\alpha \rho_e \mu_e u_e r^2 R \, d\alpha = 2 \xi (\alpha)$

l'équation (5.72) s'écrit finalement :

$$0 = \frac{2\xi}{u_e} \frac{du_e}{d\alpha}\left[\frac{\rho_e}{\rho} - f'^2\right] + f f'' + \frac{\partial}{\partial \eta}\left[C R \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{f'}{R}\right)\right] - \frac{C \sqrt{2\xi}}{\rho u_e r} \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{f'}{R}\right) \qquad (5.73)$$

Si $\quad R_{\alpha,\beta} \tilde{-} R_\alpha = cte$

(5.73) se réduit à la forme suivante :

$$\frac{2\xi}{u_e}\frac{du_e}{d\xi}\left[\frac{\rho_e}{\rho} - f'^2\right] + ff'' + (Cf'')' = 0 \qquad (5.74)$$

Cette dernière équation est semblable, à un terme près, à celle obtenue, par la méthode de similitude, à partir de l'équation de conservation de la quantité de mouvement en projection sur l'axe des α pour la couche limite développée sur un corps de révolution à courbure nulle.

Donc si l'on fait le changement de variables :

$$\xi = \int_0^\alpha \rho_e \mu_e u_e r^2 R d\alpha$$

$$\eta = \frac{u_e r}{\sqrt{2\xi}} \int_0^\beta \rho \, d\beta$$

et si l'on cherche des solutions pour u de la forme :

$$u = u_e \cdot f'(\eta)$$

on aboutit aux équations en ξ et η , (5.73) et (5.74) dans lesquelles il n'y a que des dérivées ordinaires. Ces équations restent cependant couplées avec l'équation de l'énergie par les termes C et ρ.

L'équation de l'énergie (5.65c) qui s'écrit :

$$\rho u C_p \frac{\partial T}{\partial \alpha} + \rho v R C_p \frac{\partial T}{\partial \beta} = u \frac{\partial p}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(kR \frac{\partial T}{\partial \beta}\right) + \mu R^2 \left[\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{u}{R}\right)\right]^2$$

peut être transformée de la même manière que l'équation de conservation de la quantité de mouvement en faisant le chang-

ment de variables $\xi = \xi(\alpha)$ et $\eta = \eta(\alpha,\beta)$ et en remarquant que :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} = \rho_e \mu_e u_e r^2 R \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} = \frac{\rho u_e r}{\sqrt{2\xi}} \frac{\partial}{\partial \eta}$$

On obtient finalement, compte tenu aussi du fait, de chercher des solutions de similitude pour T de la forme :

$$T = T_e(\alpha) \cdot \theta(\eta)$$

l'équation suivante :

$$f\theta' + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{C}{P_r} R\theta'\right) + CR^2 \frac{u_e^2}{C_p T_e} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{f'}{R}\right)\right]^2 = 0 \qquad (5.75)$$

après avoir posé : $u_e \frac{du_e}{d\xi} + C_p \frac{dT_e}{d\xi} = 0$ avec $C_p = cte$

et $P_r = \frac{\mu C_p}{k}$

qui pour R = cte devient :

$$f\theta' + \frac{d}{d\eta} \left(\frac{C}{P_r} \theta'\right) + C \frac{u_e^2}{C_p T_e} f''^2 = 0 \qquad (5.76)$$

équation identique à celle obtenue à partir de l'équation de l'énergie de la couche limite développée sur un corps de révolution à courbure nulle.

5.2.6. Intégration numérique des équations transformées de la couche limite (cas des corps à méridienne circulaire)

Les équations transformées de la couche limite s'écrivent donc :

$$\beta(\theta - f'^2) + ff'' + (Cf'')' = 0$$

$$\left(\frac{C}{P_r}\theta'\right)' + f\theta' + C\frac{u_e^2}{C_p T_e} f''^2 = 0$$

avec $\beta = \frac{2\xi}{u_e}\frac{du_e}{d\xi}$; $C = \frac{\rho\mu}{\rho_e\mu_e} \simeq \frac{T_e\mu}{T\mu_e}$ car $\Delta p \sim 0\ (\frac{\delta}{R})$ dans toute la couche limite, $\theta = \frac{T}{T_e} \simeq \frac{\rho_e}{\rho}$. D'autre part :

$p = \Re \rho T$ ($\Re$ constante des gaz parfaits)

Les conditions aux limites sont :

pour $\eta = 0$ $\quad f(0) = f'(0) = 0$

$$\theta(0) = \theta_w = \frac{T_w}{T_e}$$

pour $\eta \to \infty$ $\quad f'(\eta) = 1$

$$\theta(\eta) = 1$$

5.2.6.1. Méthode de calcul

Les deux équations de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie peuvent s'écrire, en tenant compte de $C = C(\eta)$ et de $P_r = P_r(\eta)$

$$f''' = -\frac{1}{C}\left[C'f'' + ff'' + \beta(\theta - f'^2)\right]$$

$$\theta'' = -\frac{C'}{C}\theta' + \frac{P_r'}{P_r}\theta' - \frac{P_r}{C} f\theta' - P_r\frac{u_e^2}{C_p T_e} f''^2$$

Elles sont résolues numériquement par la méthode de Runge-Kutta modifiée par Gill[50] (pas de $\Delta\eta = \frac{1}{10}$) de $\eta = 0$ à $\eta = 8$. (Il a été vérifié que, en prenant pour η une valeur plus grande que 8, les résultats n'étaient pas modifiés sensiblement par rapport à ceux obtenus en faisant $\eta \to \infty$).

Sur les cinq valeurs initiales nécessaires à l'intégration du système, trois seulement sont connues :

$$f(0) = f'(0) = 0$$

$$\theta(0) = \theta_w = \frac{T_w}{T_e}$$

Une méthode itérative "de tir" décrite par Dewey et Cross[1], permet une fois données des valeurs arbitraires à $f''(0)$ et à $\theta'(0)$, de trouver par la résolution de systèmes linéaires les valeurs initiales $f''(0)$ et $\theta'(0)$ qui entrainent en fin de calcul ($\eta = 8$) la vérification des deux conditions aux limites $f'(8) = 1$ et $\theta'(8) = 1$ à 10^{-6} près.

La méthode de calcul numérique a été écrite en Fortran IV[50].

5.2.6.2. Paramètres de l'écoulement visqueux

Pour chaque valeur de la variable de similitude η, on détermine les valeurs de μ et k en fonction de $T = \theta T_e$, μ et k sont donnés par les tables de Svehla[51].

On calcule aussi :

$$C = \frac{\rho\mu}{\rho_e \mu_e} = \frac{T_e}{T} \frac{\mu}{\mu_e} = \frac{1}{\theta} \frac{\mu}{\mu_e}$$

$$C' = \frac{1}{\theta} \cdot \frac{\mu'}{\mu_e} - \frac{\mu}{\mu_e} \frac{\theta'}{\theta^2}$$

$$P_r = C_p \frac{\mu}{k}$$

$$P'_r = P_r \left(\frac{\mu'}{\mu} - \frac{k'}{k}\right)$$

5.2.6.3. Transfert de chaleur à la paroi

Le transfert de chaleur à la paroi s'écrit :

$$q_w = - \left(k \frac{\partial T}{\partial \beta}\right)_w = - k_w \left(\frac{\partial T}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial \beta}\right)_w$$

ce qui donne finalement :

$$q_w = - \frac{k_w}{\sqrt{2\xi}} \rho_e u_e T_e r \left(\frac{\theta'}{\theta}\right)_w$$

5.2.6.4. Epaisseur de déplacement

Le calcul numérique de l'épaisseur de déplacement δ^* est effectué à partir de la relation suivante :

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e}\right) dy = \int_0^\delta \left(1 - \frac{T_e}{T} f'\right) dy$$

et à l'aide du changement de variable ξ , η il vient :

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{T_e}{T} f'\right) \frac{\sqrt{s}}{K} T \, d\eta$$

avec s abscisse curviligne comptée sur la génératrice du modèle

et $K = \left(\frac{3 p_e u_e T_e}{2 \mu_e \mathcal{R}}\right)$

5.2.7. Résultats théoriques

L'annexe I présente sous forme de tableau les solutions f''_w, θ'_w et $(\frac{\theta'}{\theta})_w$ pour différentes valeurs de β , $\frac{u_e^2}{C_p T_e}$ et T_e.

5.2.7.1. Cas des modèles à méridienne circulaire

Les solutions de Cohen et Reshotko[3] donnant le frottement à la paroi de modèles placés en présence d'un gradient de pression positif, exprimés sous la forme :

$$f''_w = \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{u}{u_e}\right)\right)_w$$

en fonction du gradient de pression $\beta^* = \beta . \frac{T_{oe}}{T_e}$ et pour différentes valeurs de la température d'arrêt T_{oe} de l'écoulement non perturbé (fig.43) montrent que pour certaines valeurs de β^* qui dépendent de T_{oe}, $f''_w = 0$ ce qui devrait correspondre dans l'écoulement à un décollement de la couche limite. Les courbes similaires à celles obtenues par Cohen-Reshotko, dans le cas des modèles $\frac{s_j}{R} = 0$ (fig.44) montrent que les solutions f''_w d'une part sont indépendantes du rayon de courbure des modèles, du nombre de Mach et de la pression d'arrêt, d'autre part n'atteignent pas les valeurs de β^*_ℓ pour lesquelles il y aurait décollement de la couche limite. La planche 45 montre l'évolution de β^* en fonction de l'abscisse réduite $\frac{s}{R}$ pour différentes conditions de l'écoulement infini amont (M, p_o, T_o) ; on constate que β^* ne dépend que du nombre de Mach M, d'autre part que lorsque $\frac{s}{R}$ atteint la valeur limite qui a été défini au paragraphe 5.1.5.1. la valeur de $|\beta^*|$ est inférieure aux

valeurs de $|\beta_\ell^*|$ qui entraineraient le décollement de la couche limite et ceci même dans le cas où $T_{o\infty} = 300°K$.

Les résultats théoriques des flux de chaleur convectée à la paroi des modèles sont présentés sur les planches 46 et 47 ; on peut constater qu'ils sont exprimés sous la forme $q\sqrt{\frac{R}{p_{o_\infty}}}$ et représentés en fonction de l'abscisse réduite $\frac{s}{R}$; ils ne dépendent que du nombre de Mach et de la température d'arrêt de l'écoulement infini amont.

En ce qui concerne l'évolution de l'épaisseur relative de la couche limite $\frac{\delta}{R}$ la figure (48) donne un exemple à $R_o = 30$ cm, $M = 7$, $p_o = 25$ bars, $T_o = 600°K$ de comparaison entre l'épaisseur de déplacement relative $\frac{\delta^*}{R_o}$ déduite de l'intégration de la couche limite avec les prévisions déduites de la connaissance de l'écoulement extérieur. L'épaisseur relative de déplacement et par suite l'épaisseur relative de la couche limite est bien représentée quant à l'ordre de grandeur et l'évolution, au-delà d'une certaine abscisse par $\frac{1}{(Re_R)^{1/2}}$; d'autre part les courbes 3 et 4 tracées en supposant une loi de variation de $\frac{\delta}{R} \sim \frac{K}{(\int_o^s Re_s\, ds)^{1/2}} \cdot \frac{s/R}{(-\frac{\partial p}{\partial y})^\alpha}$ respectent bien l'évolution théorique de $\frac{\delta^*}{R}$. Cette comparaison illustrée dans un cas particulier s'applique à tous les cas envisagés.

5.2.7.2. Cas des modèles à pointe cônique

Comme nous l'avons mentionné plus haut les approximations qui ont été faites dans les équations de Navier-Stokes en ce qui concerne l'ordre de grandeur des termes comportant le gradient de courbure $\frac{\partial R}{\partial \alpha}$, ne sont pas rigoureuses au raccorde-

ment cône-jupe de ces modèles. On a néanmoins appliqué la méthode de similitude locale (dans le but d'une comparaison avec les expériences) pensant qu'elle pouvait rendre compte approximativement du comportement de la couche limite sinon au voisinage du raccordement, du moins dans une région éloignée sur la jupe.

Au raccordement cône-jupe, la discontinuité de courbure conduit à deux valeurs de β^*, l'une égale à 0 (valeur sur la génératrice du cône), l'autre égale à β_j^* (valeur initiale sur la jupe). Les solutions, donnant le frottement à la paroi des modèles, exprimées sous la forme $f''_w = \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{u}{u_e}\right) \right)_w$ en fonction du gradient de pression β^* et pour différentes valeurs de la température d'arrêt de l'écoulement non perturbé se représentent (fig.49) par des courbes qui, comme dans le cas des modèles $\frac{s_j}{R} = 0$, sont indépendantes du rayon de courbure des modèles, du nombre de Mach et de la pression d'arrêt de cet écoulement. D'autre part comme on peut le voir, pour une température d'arrêt fixée, le système des équations admet des solutions dans les cas $|\beta^*| < |\beta_\ell|$ ce qui est, comme nous l'avons déjà dit, toujours le cas le long des méridiennes des modèles $\frac{s_j}{R} = 0$, par contre au raccordement cône-jupe des modèles $\frac{s_j}{R} \neq 0$ la valeur de $|\beta_j^*|$ peut être supérieure à $|\beta_\ell^*|$. Le développement en série de β^* pour $s \to s_j$ $(s > s_j)$ suivant les puissances entières de $(s-s_j)/R$ s'écrit en se limitant au premier terme :

$$\beta^* = - g_1 (M_\infty, \sigma) \left\{ \frac{s_j}{R} + 3 \left[1 - g_2 (M_\infty, \sigma) \frac{s_j}{R} \right] \frac{s-s_j}{R} \right\}$$

pour $\gamma = 1,4$

$$g_1 = \frac{2}{7}\,\gamma\, M_\infty^2 \sigma .\, F_o^{-1} \left[1 - \frac{1}{2} A\, F_o^{2/7} \right]^{-1}$$

$$g_2 = \gamma\, M^2 \sigma\, F_o^{-1} \left(1 - \frac{9}{14}\, A\, F_o^{2/7}\right) \left(1 - \frac{1}{2} A\, F_o^{2/7}\right)^{-1}$$

et $F_o = 1 + \gamma\, M_\infty^2\, \sigma^2$ et $A = \left(\frac{p_{eo}}{p_e}\right)^{-2/7}$

Or g_1 à σ donné est une fonction décroissante de M, de sorte que β_j^* pour $s = s_j$ est également fonction décroissante de M ce qui permet de penser que le calcul de la couche limite par la méthode de similitude locale appliquée aux modèles $s_j/R \neq 0$ peut représenter une bonne approximation des solutions exactes lorsque M_∞ croît.

Les courbes concernant $\theta'(0)$ ou plutôt $(Nu/\sqrt{R_o}).\sqrt{s_j/R}$ fonction de T_e à M constant, représentées dans la figure 50, rendent compte de la discontinuité des solutions au raccordement cône-jupe, discontinuité qui tend bien à disparaître pour $M_e \gg 1$ et $T_e > 300°K$ $(T_w/T_e < 1)$.

A titre d'exemple, il est représenté dans la figure 51 la répartition du nombre de Nusselt ou plutôt $Nu/\sqrt{R_o}$ à la paroi des deux types de modèles $s_j/R = 0$ et $0,1$; $R = 100$ cm, lorsque $M_{ej} = 8,15$ et $T_{ej} = 285°K$ ($M = 10$ et $T_o = 4000°K$).

On peut remarquer sur cet exemple, d'une part que les solutions obtenues en prenant pour valeur de β^* à la jonction β_j^* sur la jupe et $\beta^* = 0$ sur le cône sont très voisines, d'autre part que les deux familles de solutions obtenues respectivement pour $\frac{s_j}{R} = 0$ et $\frac{s_j}{R} = 0,1$ tendent à se confondre lorsque $\frac{s-s_j}{R}$ augmente indéfiniment.

5.3. Résultats expérimentaux et comparaison avec la théorie

5.3.1. Répartition des pressions

Les résultats des mesures de pressions réalisées à la paroi des modèles $\frac{s_j}{R} = 0$ et 0,1 placés dans la soufflerie hypersonique M = 4 et 7 sont reproduits sous la forme du coefficient de pression C_p en fonction de l'abscisse réduite $\frac{s-s_j}{R}$ sur la figure 52 et comparés à la théorie de Newton-Buseman ($\frac{s_j}{R} = 0$) et aux résultats déduits de la méthode des caractéristiques ($\frac{s_j}{R} = 0,1$). L'accord théorie expérience est excellent ; on peut remarquer que pour $\frac{s_j}{R} = 0,1$ il apparait bien une fluctuation expérimentale à l'aval de la jonction cône - jupe comme le prévoit la théorie des caractéristiques.

5.3.2. Répartition du flux de chaleur

Sur la planche 53, on a porté les résultats du flux de chaleur obtenues à la paroi des modèles $\frac{s_j}{R} = 0$ exprimés sous la forme $Nu/\sqrt{R_o}$ en fonction de l'abscisse réduite $\frac{s}{R}$ à M = 4 et R = 20 et 30 cm, p_o = 5 bars, T_o = 400° et 600°K. La comparaison avec la théorie est très bonne et confirme la validité des approximations de premier ordre des équations de Navier - Stokes. Pour $\frac{s}{R} > 0,3$, l'accroissement rapide du coefficient mesuré semble déceler l'apparition de la transition dans la couche limite.

Les résultats du coefficient $Nu/\sqrt{R_o}$ mesuré à la paroi des modèles $\frac{s_j}{R} = 0$, 0,1 et 0,58, dans les conditions suivantes : M = 7, p_o = 8 et 25 bars, T_o = 600°K, R = 20, 30, 19,2cm

sont représentés en fonction de $\frac{s-s_j}{R}$ dans la planche 54. On remarque que pour $\frac{s_j}{R}$= 0,1'accord théorie expérience, comme à M = 4, est excellent ; pour $\frac{s_j}{R}$= 0,1, comme il avait été prévu dans l'analyse des résultats théoriques, la théorie est en défaut, au voisinage du raccordement cône-jupe, toutefois l'écart entre la théorie et l'expérience s'atténue lorsque $\frac{s-s_j}{R}$ croît et lorsque les valeurs expérimentales tendent à se confondre avec celles obtenues sur le modèle $\frac{s_j}{R}$ = 0 de même rayon de courbure. En ce qui concerne les corps $\frac{s_j}{R}$ = 0,58 les équations n'admettent de solutions que pour $\frac{s-s_j}{R}$ > 0,06 correspondant à $|\beta^*| > |\beta^*_\ell| = 0,37$; cependant pour $\frac{s-s_j}{R}$ > 0,06 les solutions sont éloignés des résultats des expériences.

La répartition expérimentale sur la jupe du modèle $\frac{s_j}{R}$ = 0,1, M = 7, met en évidence deux régions distinctes : dans la première région, immédiatement en aval de la jonction, la concavité de la courbe de répartition est tournée vers le haut, dans la deuxième région la concavité est tournée vers le bas ; l'étendue de la première région est une fonction croissante de $\frac{s_j}{R}$ comme le confirme la répartition expérimentale du flux convecté à la paroi du modèle $\frac{s_j}{R}$ = 0,58, la longueur de la méridienne de la jupe du modèle expérimentée étant insuffisante pour qu'apparaisse la 2ème région.

En revenant au paragraphe 5.1.5.2. concernant l'étude de la structure de l'écoulement non visqueux autour des modèles $\frac{s_j}{R} \neq 0$ qui avait permis de mettre en évidence trois régions distinctes : la région correspondant à l'écoulement autour de la pointe conique, la région formée de l'onde de compression

issue de la paroi et la région d'ondes mixtes formées d'ondes de compression et de détente, on peut alors constater que l'étendue de la seconde région est approximativement égale à celle de la courbe de répartition de flux de chaleur qui tourne sa concavité vers le haut.

La figure 55 propose un exemple de répartition de flux de chaleur expérimental et théorique sur un modèle $\frac{s_j}{R} = 0{,}1$ avec des conditions d'essais telles que les calculs ne font pas apparaître de discontinuité notable dans les valeurs du nombre de Nusselt au raccordement. On a porté pour comparaison sur la figure 56 les résultats expérimentaux et théoriques obtenus par Zakkay[53] sur un modèle $\frac{s_j}{R} = 0{,}58$; la courbe de répartition expérimentale a sa concavité tournée vers le haut, ce qui est en accord avec les résultats présentés dans la figure 54 et l'interprétation faite à partir de l'écoulement non visqueux.

Le calcul théorique de Zakkay a été effectué en appliquant la relation de Lester Lees suivante du flux de chaleur ou plutôt de Nu :

$$\frac{Nu}{\sqrt{R_o'}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{g'_w}{1-g_w}\right) \frac{\bar{\rho}_e \bar{\mu}_e \bar{u}_e \bar{r}}{\int_o^s \bar{\rho}_e \bar{\mu}_e \bar{u}_e r^2 \, ds} \; P_r^{-2/3}$$

les valeurs de $\frac{g'_w}{1-g_w}$ sont tirés, en fonction de β et $\frac{T_w}{T_e}$, des tableaux de Cohen-Reshotko, résultats de l'intégration des équations de la couche limite dans le cas particulier $P_r = 1$ c'est-à-dire indépendamment de variations du paramètre $\frac{u_e^2}{C_p T_e}$. Cette méthode, que l'on sait erronée pour les corps $\frac{s_j}{R} \neq 0$, a

été, quoi qu'il en soit, appliquée à tous les modèles $\frac{s_j}{R} \neq 0$ y compris le modèle utilisé par Zakkay et a eu pour résultats d'obtenir des courbes théoriques de répartition de flux à concavité tournée vers le bas ; la courbe théorique de Zakkay ne peut donc s'expliquer que par la distribution des β^* en fonction de $\frac{s}{R}$.

Il est à remarquer qu'aucun décollement de la couche limite n'a été constaté sur les modèles utilisés, même dans le cas où $|\beta^*|$ est supérieur à $|\beta^*_\ell|$, valeur limite du gradient de pression correspondant au décollement.

On peut par ailleurs, comme Wyborny et Kabelitz[62], adopter le critère de décollement de la couche limite laminaire de Chapman exprimé sous la forme suivante :

$$\frac{L^2_{réf}}{q_\infty} \left(\frac{d^2p}{dx^2}\right)_{crit} = K_s \left(\frac{L_{réf}}{\delta^*_i}\right) \frac{q_i}{q_\infty} (C_{f_i})^{3/2} (M_i^2 - 1)^{1/4}$$

où l'indice (i) se réfère à la ligne de séparation ; la valeur de la constante K_S a été déterminée expérimentalement par Wyborny et Kabelitz dans les cas où la ligne de séparation se situe au raccordement cône - jupe. La figure 57 représente, dans les régions de décollement et de non décollement de la couche limite définie selon ces auteurs, les positions des obstacles $s_j/R \neq 0$; on peut constater d'une part que, lorsque s_j tend vers zéro, la séparation de la couche limite ne peut pas se produire, d'autre part que, pour s_j croissant, il doit exister des valeurs de $s_j/R > 1$ pour lesquelles la séparation peut se produire.

En conclusion la séparation de la couche limite, qui

ne se produit pas sur les obstacles à génératrice entièrement circulaire, peut apparaître sur les obstacles $s_j/R \neq 0$ lorsque la valeur du gradient de pression transversal dans la couche de choc, décroît fortement. Ceci peut se produire, soit par l'onde de détente, due à la réflexion sur le choc attaché à la pointe de l'obstacle de l'onde de compression issue du raccordement cône - jupe, onde de détente dont l'intensité est fonction croissante de s_j/R, soit par une modification de la courbure de la jupe, cas des modèles étudiés par Wyborny et Kabelitz.

CONCLUSION

Nous nous étions proposés de définir les caractéristiques d'écoulements supersoniques ou hypersoniques soumis à des gradients de pression longitudinaux négatif ou positif ; ces caractéristiques ont été déterminées dans les cas concrets, de l'écoulement dans le divergent tronconique d'une tuyère et de l'écoulement autour de modèles de révolution à méridienne concave.

En ce qui concerne l'écoulement dans la tuyère, les paramètres caractéristiques de l'écoulement autour d'un modèle tel que la pression et le flux de chaleur à la paroi diffèrent profondément selon qu'on suppose un écoulement libre uniforme ou conique ; or, les résultats expérimentaux ont montré que l'écoulement libre hypersonique provenant de la tuyère tronconique d'une soufflerie à choc peut être considéré comme conique. Un calcul simple permettant d'interpréter dans ce sens les mesures a été exposé : il apporte une correction à cet effet d'écoulement de source et peut, tout en étant approché, donner des résultats s'accordant raisonnablement avec l'expérience.

Les effets de conicité de l'écoulement s'atténuant lorsque les angles d'ouverture des lignes de courant qui intersectent les modèles diminuent, seules les tuyères à divergent tronconique de longueur notable, permettent d'obtenir un écoulement quasi-uniforme autour de modèles donnés.

En supposant l'écoulement sain d'une part en équilibre thermodynamique, d'autre part hors d'état d'équilibre vibratoire, considérant que les effets de relaxation vibratoire pouvaient être importants dans les conditions d'expérience où la tempéra-

ture réservoir est de l'ordre de 4000°K, le calcul de la couche limite développée sur les parois du divergent a été réalisé par la méthode de similitude locale et a conduit à des résultats en bon accord avec l'expérience, la comparaison entre les courbes théoriques et les résultats de l'expérience tend à montrer que les effets de relaxation vibratoire ne peuvent pas être mis en évidence par les résultats des mesures de pression ; par contre, les mesures de flux de chaleur se placent plus près de la courbe théorique déduite des calculs tenant compte d'un écoulement sain en équilibre thermodynamique.

L'étude du comportement de la couche limite laminaire en présence d'un gradient de pression positif a été réalisée dans le cas où le gradient de pression est imposé par les parois de modèles de révolution à pointe conique raccordée tangentiellement à une jupe dont la demi-méridienne a été choisie en arc de cercle, de telle sorte que les grandeurs mécaniques de l'écoulement non visqueux peuvent être calculées. La structure de cet écoulement rotationnel défini par l'application de la méthode des caractéristiques est telle qu'un corps à génératrice totalement circulaire, éventuellement utilisé comme corps central de prise d'air d'un stato ou turboréacteur, a une efficacité supérieure à la prise d'air de même maître-couple considérée comme idéale mais par contre présente une hétérogénéité dans la pression d'arrêt

dans le plan d'entrée de la carène, la pression d'arrêt décroissant quasi-linéairement dans une section droite depuis la surface de la souris jusqu'à la lèvre de carène, le nombre de Mach restant pratiquement constant.

Les résultats obtenus au voisinage de la paroi, comparés à ceux déduits de méthodes approximatives et à l'expérience ont permis de choisir les approximations au premier ordre dans les équations générales de Navier-Stokes, approximations valables uniquement dans le cas d'une paroi à courbure continue (cas des modèles sans pointe conique) ; les résultats de l'intégration des équations de la couche limite par la méthode de similitude locale sont alors en très bon accord avec l'expérience.

On a montré par ailleurs que lorsque l'abscisse s/R atteint la valeur correspondant approximativement à une déviation des lignes de courant égale à celle que l'on aurait sur un cône d'angle d'ouverture limite, il y a blocage de la couche de choc caractérisée par une onde de choc droite, et que les valeurs à cette abscisse du paramètre de gradient de pression β^* restent supérieures aux valeurs de β_ℓ^* qui entraineraient le décollement de la couche limite et ceci même dans le cas où $T_{e_o} = 300°K$.

Dans le cas des modèles à pointe conique, la méthode est en défaut mais l'analyse systématique de l'influence du paramètre de gradient de pression longitudinal β , du paramètre $\frac{u_e^2}{C_p T_e}$ pour un nombre de Prandtl $Pr \neq 1$ et de la condition aux limites $\frac{T_w}{T_e}$ montre que les solutions représentent avec une bonne approximation l'expérience lorsque les valeurs de β_j au raccordement cône - jupe restent petites devant celles de β_ℓ

pour lesquelles $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, le rapport $\frac{T_w}{T_e} < 1$ et $M >> 1$. Il n'y a pas de décollement de la couche limite dans tous les cas envisagés, y compris pour $\beta^* < \beta^*_\ell$.

Enfin, en suivant Chapman et Wyborny, on confirme que l'écoulement de couche limite ne peut pas se séparer de la paroi tant que la longueur des génératrices des pointes coniques n'excèdent pas la longueur du rayon de courbure des méridiennes de la paroi concave.

Vu et permis d'imprimer

Marseille, le 3 Juillet 1972

Le Président

F. BOREL

BIBLIOGRAPHIE

1. C.F. DEWEY and J.F. GROSS
   Exact similar solutions of the laminar boundary-layer equations.
   (Advances in heat transfer - Academic Press. p.317-446,1967).

2. W.D. HAYES and R.F. PROBSTEIN
   (Hypersonic flow theory. Academic Press - New-York, 1959).

3. C.B. COHEN and E. RESHOTKO
   Similar solutions for the compressible laminar boundary layer with heat transfer and pressure gradient.
   (Recent advances in heat and mass transfer. Mc Graw-Hill Book Company, Inc. 1961, p.82, 114).

4. I. FLÜGGE-LÖTZ and F.G. BLOTTNER
   Computation of the compressible laminar boundary-layer flow including displacement-thickness interaction using finite difference methods.
   (AFOSR 2206. T.R. n° 131, Janvier 1962).

5. J.S. MURPHY
   Some effects of surface curvature on laminar boundary layer flow. J.A.S. May 1953, pages 338-344.

6. K.T.YEN and K. TOBA
   A theory of the two-dimensional laminar boundary layer over a curved surface. J.A.S. November 1961, pages 877-884.

7. F. SCHULTZ-GRUNOW and W. BRENER
   Laminar boundary layers on combered walles.
   Institut für Mechanik Technische Hochschule Aachen.

8. VAN DYKE M.
   (J. Fluid Mech. 14 p.161-177 and p.48L-495 (1962)).

9. P. REBUFFET
   Aérodynamique expérimentale
   Tome 2. Librairie Polytechnique Béranger. Dunod. Paris 1966.

10. H. MARK
The interaction of a reflected shock wave with the boundary layer in a shock tube
Graduate school of aeronautical engineering, 1957.

11. DAVIES
Influence of reflected shock and boundary layer interaction on shock tube flows
"Physics of Fluids" , Supplement I (1969).

12. R. BRUN et L.Z. DIMITRESCU
Sur quelques propriétés de l'écoulement chaud à l'extrémité d'un tube à choc.
C.R. Acad. Sc. 1968.

13. M. MIRELS et J.F. MULLEN
Small perturbation theory for shock tube attenuation and nonuniformity. Phys. of Fluids, August 1954.

14. J.A. ROY
Atténuation d'une onde de choc droite dans sa propagation dans un tube à choc.
Thèse de 3ème Cycle. I.M.F.M. 1966.

15. J. VALENSI, J.P. GUIBERGIA, B. TOCQUET
Etude théorique et expérimentale des phénomènes accompagnant l'amorçage d'une tuyère hypersonique
Contrat D.R.M.E. Note Tech. 3/702 AY.

16. R. MARMEY et J.P. GUIBERGIA
Etude expérimentale des phénomènes accompagnant l'amorçage d'une tuyère hypersonique
C.R. Acad. Sc. p.106-109 (1970).

17. J.P. GUIBERGIA et R. MARMEY
Etude théorique et expérimentale de l'amorçage d'une tuyère supersonique
C.R. Acad. Sciences p.191-194 (1970).

18. R.F. CHISNELL
The motion of a shock wave in a channel with application to cylindrical and spherical shock waves
J.F.M. p.286-298, 1957.

19. J.A.D. ACKROD
A study on the running time in reflected shock tunnel
Thesis Queen Mary College Department of Aeronautics.

20.C.E. SMITH
The starting process in a hypersonic nozzle
J.F.M. Vol.4, page 625 (1966).

21.G.B. WHITHAM
On the propagation of shock wave through region of non uniform area flow
J.F.M. p.337-360 (1958).

22.P. ISSARTIER et R. MARMEY
Mesure de la pression à la paroi des obstacles dans les souffleries hypersoniques à choc réfléchi.
C.R. Acad. Sc. 1966.

23.R.J. VIDAL
A resistance thermometer for transient surface temperature measurements
Cornell Aeronautical Laboratory. Inc. Buffalo. New-York
Sept.1956.

24. J. VALENSI et M. BEHAR
C.R. Ac. Sc. 253, p.70, 1961.

25.P.H. ROSE et W.I. STARK
Stagnation point heat transfer measurement in dissociated air. AVCO Research Laboratory April 1957.

26.J. MAULARD
Etude du flux mètre à température superficielle pour mesurer dans les tubes à choc.
O.N.E.R.A. Note Technique n°139 (1969).

27. R. BRUN et J.P. GUIBERGIA
Influence de la sphéricité d'un écoulement libre hypersonique sur la distribution de la pression et du flux de chaleur à la surface de corps de révolution élancés.
Journal de Mécanique. Vol.6 n°1, Mars 1967.

28. J.D. WHITFIELD et G.D. NORFLEET
Source flow effects in conical hypervelocity nozzles
(A.E.D.C., T.D.R. 62.116, 1962).

29. M. INONYE
Numerical solutions for blunt axisymmetric bodies in a supersonic spherical source flow.
N.A.S.A. TD.N. 3383, 1966.

30. J.W. CLEARY
An experimental and theorical investigation of the pressure distribution and flow fields of blunted cones at hypersonic Mach numbers.
N.A.S.A. T.DN. 2969, 1965.

31. J.B. GRIFFITH et C.H. LEWIS
Laminar heat transfer to spherically blunted cones at hypersonic conditions.
A.I.A.A. J. Vol.2, n°3, 1964.

32. L.LEES
Laminar heat transfer over blunt nozed bodies at hypersonic flight speeds.
Jet Propulsion. Vol.26, p.259, 1956.

33. R.C. MILLIKAN et D.R. WHITE
J. Chem. Phys. 39. 12 (1963) 3209.

34. J.L. STOLLERY et J.E. SMITH
J.F.M. 13. 225 (1962).

35. A.H. SHAPIRO
The dynamics and thermodynamics of compressible fluid flow. p.1100 (1954).

36. J. FAUCHAS
Ecoulement hors d'équilibre vibratoire de l'azote dans une tuyère hypersonique
Thèse de 3ème Cycle, I.M.F.M. 1966.

37. E.R.G. ECKERT
Engineering relations for friction and heat transfer to surfaces in high velocity flow
J.A.S. 22. 585-587 (1955).

38. S.I. PAI
Introduction to the theory of compressible flow.
D. Van Nostrand Cy Inc. Princeton New-Jersey, 1959.

39. R.E. MEYER
The method of characteristics for problems of compressible flow involving two independent variable. Part I. The general theory.
Quartely Journal of Mechanics and App. Math. p.281, 1948 p.196-219.

40. V.L. SORENSEN
Computer program for calculating flow fields in supersonic inlets
N.A.S.A. T.N.D. 2897 (1965).

41. B.H. ANDERSON
Design of supersonic inlets by a computer program incorporating the method of characteristics.
N.A.S.A. T.N.D. 4960, Jan.1969.

42. Z. KOPAL
Tables of supersonic flow around cones
M.I.T. Tech. Rept. 1947.

43. J.L. SIMS
Tables for supersonic flow around right circular cone at small angle of attack
NASA SP 3007, 1964.

44. H.W. SIBERT
High Speed Aerodynamics
New-York. Printice Hall, Inc.1948.

45. R.N. COX and L.B. CRABTREE
Elements of hypersonics aerodynamics
The English Universities press. LTD. London 1965.

46. G.G. CHERNYI
Introduction to hypersonic flow
Translated and edited by R.F. Probstein
Academic Press. New-York and London, 1961.

47. S.I. PAI
Viscous flow theory I - Laminar Flow
D. Van Nostrand Company inc. Princeton New-Jersey

48. J.C. WANNER
Fonctionnement, limitations, adaptation et régulations des moteurs. Tome I : Le réacteur.
2 Edition 1964 N.R. 53/1.

49. P. CARRIERE
Aérodynamique interne des réacteurs
Première partie : prises d'air. 1966.

50.B. ROUX et J.F. REY
C.R. Acad. Sc. 270 série A. 1970, p.617.

51. R.A. SVEHLA
Estimated viscosities and conductivities of gases at high temperature.
NACA TR 132.

52. Tables of thermodynamic and transport properties
Pergamon Press 1960.

53. V. ZAKKAY, A. BOSS and P.F. JENSEN Jr.
Laminar, transitional and turbulent flow with adverse pressure gradient on a cone-flare at Mach 10
A.I.A.A. Vol.5. Feb.1967.

54. N. HAYASI
Effects of surface curvature on laminar boundary layer flow. A.I.A.A. Vol.1 n°4, 1963.

55. C.Y. LIU and V.A. SANDBORN
Laminar velocity profiles in adverse pressure gradients
J. Aircraft V.5. N°7, 1967.

56. R.T. DAVIES, M.J. WERLE and S.F. WORNOM
A consistent formulation of compressible boundary layer theory with second order curvature and displacements effects
A.I.A.A. Vo . 8 n°9, 1970.

57. R. MARMEY, J.P. GUIBERGIA et R. BRUN
Mesures de pression et de flux de chaleur à la paroi d'un cône placé dans un écoulement hypersonique à enthalpie génératrice élevée
Revue Roumaine des Sciences Techniques (Mécanique Appliquée) (1971).

58. R. MARMEY
Sur les problèmes rencontrés dans la réalisation, la mise au point et l'utilisation d'une soufflerie à choc réfléchi en vue de l'étude des phénomènes aérodynamiques et aérothermiques à haute altitude et aux hypervitesses.
Thèse de 3ème cycle. I.M.F.M. 23 Décembre 1969.

59. G.T. SKINNER
Analogue Network to convert surface temperature to heat flux. A.R.S. June 1960.

60. P. LIBBY and H. FOX, R. SANATOR and J. DE CARLOS
Laminar Boundary layer near the plane of symmetry of a hypersonic inlet
A.I.A.A. V. 1 n°12. Dec.1963.

61. T. ALZIARY de ROQUEFORT
Contribution à l'étude de l'interaction et du décollement de la couche limite laminaire avec transfert de chaleur en régime supersonique
Thèse de Doc. Es. Sc. 23 Juin 1969.

62. H.P. KABELITZ and W. WYBORNY
Preliminary results of an investigation on hypersonic boundary layer separation on axisymetric compression bodies
Institut für Angewandte Gasdynamik der D.F.L.R. Porz-Wahn, July 1970.

63. P.K. CHANG
Separation of Flow. Pergamon Press, 1966.

A N N E X E 1

Solutions des équations de la couche limite laminaire

(similitude locale)

$P_r = 0,72$, $C = \frac{\rho\mu}{\rho_e \mu_e} = cte$, $T_w = 290°K$

β	$\frac{T_{eo}}{T_e}$	M_e	$\frac{u_e^2}{C_p T_e}$	β^*	T_e	f''_w	θ'_w	$(\frac{\theta'}{\theta})_w$
0	4	3,87	6	0	50	0,47810	-0,96179	-0,16583
					100	0,49643	0,28053	0,09674
					150	0,49384	0,70324	0,36374
					200	0,48605	0,90088	0,62130
					250	0,47695	1,00692	0,86804
					300	0,46780	1,06796	1,10479
					350	0,4597	1,0995	1,3360
					400	0,4515	1,1225	1,5580
					450	0,44303	1,13827	1,76628
					500	0,43583	1,14472	1,97365
	6	5	10	0	50	0,47810	-0,24357	-0,04199
					100	0,49643	1,02628	0,35389
					150	0,49384	1,44509	0,74746
					200	0,48805	1,63103	1,12485
					250	0,47695	1,72341	1,48570
					300	0,46780	1,77070	1,83176
					350			
					400	0,45075	1,80298	2,48687
					450	0,44303	1,803380	2,79900
					500	0,43583	1,79943	3,10247
	8	5,92	14	0	50	0,47810	0,47464	0,08184
					100	0,49643	1,77203	0,61105
					150	0,49384	2,18695	1,13118
					200	0,48605	2,36119	1,62840
					250	0,47695	2,43990	2,10336
					300	0,46780	2,47343	2,55873
					350			
					400	0,45075	2,48012	3,42085
					450	0,44303	2,46933	3,83173
					500	0,43583	2,45414	4,23128

β	$\frac{T_{eo}}{T_e}$	M_e	$\frac{u_e^2}{c_p T_e}$	β^*	T_e	f''_w	θ'_w	$(\frac{\theta'}{\theta})_w$
0	10	6,71	18	0	50	0,47810	1,19286	0,20567
					100	0,49643	2,51778	0,86820
					150	0,49384	2,92880	1,51490
					200	0,48605	3,09134	2,13196
					250	0,47697	3,15639	2,72102
					300	0,46780	3,17617	3,28569
					350			
					400	0,45075	3,15725	4,35483
					450	0,44303	3,13487	4,86445
					500	0,43583	3,10886	5,36010
0	12	7,42	22	0	50	0,47810	1,91108	0,32950
					100	0,49643	3,26353	1,12536
					150	0,49384	3,67065	1,89861
					200	0,48605	3,82149	2,63551
					250	0,47695	3,87288	3,33869
					300			
					350			
					400	0,45075	3,83439	5,28881
					450	0,44303	3,80040	5,89717
					500	0,43583	3,76357	6,48891
0	14	8,06	26	0	50	0,47810	2,62930	0,45333
					100	0,49643	4,00928	1,38251
					150	0,49384	4,41251	2,28233
					200	0,48605	4,55164	3,13906
					250	0,47695	4,58936	3,95635
					300			
					350			
					400			
					450	0,44303	4,46594	6,92990
					500	0,43583	4,41828	7,61773

β	$\frac{T_{ee}}{T_e}$	M_e	$\frac{u_e^2}{C_p T_e}$	β^*	T_e	f''_w	θ'_w	$(\frac{\delta'}{\delta})_w$
-0,005	4	3,87	6	-0,020	50	0,4407	-0,9917	-0,1710
					100	0,4744	0,2307	0,0864
					150	0,4774	0,6775	0,3504
					200	0,4726	0,8781	0,6056
					250	0,4654	0,9863	0,8502
					300	0,4575	1,0489	1,0851
					350	0,4498	1,0948	1,3121
					400	0,4423	1,1192	1,5308
					450	0,4349	1,1222	1,7414
					500	0,4282	1,1294	1,9472
	6	5	10	-0,030	50	0,4379	-0,3204	-0,0552
					100	0,4715	0,9626	0,3319
					150	0,4746	1,3907	0,7193
					200	0,4698	1,5825	1,0914
					250	0,4626	1,6789	1,4473
					300	0,4548	1,7292	1,7889
					350	0,4471	1,7581	2,1182
					400	0,4395	1,7657	2,4354
					450	0,4324	1,7680	2,7435
					500	0,4257	1,7650	3,0430
	8	5,92	14	-0,040	50	0,4350	0,3431	0,0392
					100	0,4687	1,6663	0,5746
					150	0,4718	2,0957	1,0840
					200	0,4671	2,2788	1,5716
					250	0,4599	2,3637	2,0376
					300	0,4521	2,4017	2,4846
					350	0,4445	2,4188	2,9156
					400	0,4369	2,4149	3,3308
					450	0,4299	2,4065	3,7342
					500	0,4232	2,3933	4,1264

β	$\frac{T_{eo}}{T_e}$	M_e	$\frac{u_e^2}{C_p T_e}$	β^*	T_e	f''_w	θ'_w	$(\frac{\theta'}{\theta})_w$
-0,005	10	6,71	18	-0,050	50	0,4322	0,9986	0,1722
					100	0,4658	2,3618	0,8144
					150	0,4689	2,7926	1,4444
					200	0,4643	2,9670	2,0463
					250	0,4572	3,0405	2,6211
					300	0,4495	3,0665	3,1722
					350	0,4419	3,0719	3,7039
					400	0,4344	3,0566	4,2159
					450	0,4273	3,0375	4,7134
					500	0,4270	3,0144	5,1973
	12	7,42	22	-0,060	50	0,4294	1,6462	0,2838
					100	0,4629	3,0491	1,0514
					150	0,4661	3,4811	1,8006
					200	0,4615	3,6473	2,5154
					250	0,4545	3,7094	3,1978
					300	0,4470	3,7298	3,8532
					350	0,4394	3,7254	4,4845
					400	0,4318	3,6908	5,0908
					450	0,4248	3,6613	5,6813
					500	0,4182	3,6283	5,2557
	14	8,06	26	-0,070	50	0,4266	2,2860	0,3941
					100	0,4600	3,7281	1,2856
					150	0,4632	4,1616	2,1525
					200	0,4586	4,3195	2,9789
					250	0,4517	4,3705	3,7676
					300	0,4447	4,3935	4,5278
					350	0,4379	4,4040	5,2634
					400	0,4308	4,3811	5,9708
					450	0,4234	4,3248	6,6504
					500	0,4157	4,2350	7,3017

β	$\frac{T_{eo}}{T_e}$	M_e	$\frac{u_e^2}{C_p T_e}$	β^*	T_e	f''_w	θ'_w	$(\frac{\theta'}{\theta})_w$
-0,010	4	3,87	6	-0,040	50	0,4016	-1,0190	-0,1757
					100	0,4516	0,2210	0,0763
					150	0,4607	0,6516	0,3371
					200	0,4589	0,8552	0,5898
					250	0,4536	0,9654	0,8323
					300	0,4470	1,0298	1,0652
					350	0,4403	1,0745	1,2901
					400	0,4335	1,0999	1,5072
					450	0,4266	1,1061	1,7163
					500	0,4204	1,1139	1,9204
	6	5	10	-0,060	50	0,3957	-0,3939	-0,0679
					100	0,4459	0,8991	0,3100
					150	0,4549	1,3360	0,6910
					200	0,4533	1,5336	1,0577
					250	0,4480	1,6341	1,4087
					300	0,4416	1,6874	1,7456
					350	0,4348	1,7077	1,5646
					400	0,4280	1,7281	2,3835
					450	0,4215	1,7320	2,6875
					500	0,4153	1,7302	2,9831
	8	5,92	14	-0,080	50	0,3897	0,2152	0,0371
					100	0,4399	1,5607	0,5382
					150	0,4491	2,0040	1,0366
					200	0,4476	2,1959	1,5144
					250	0,4425	2,2869	1,9715
					300	0,4361	2,3296	2,4099
					350	0,4295	2,3393	2,8250
					400	0,4228	2,3491	3,2401
					450	0,4164	2,3431	3,6359
					500	0,4103	2,3320	4,0207

β	$\frac{T_{eo}}{T_e}$	M_e	$\frac{u_e^2}{C_p T_e}$	β^*	T_e	f''_w	θ'_w	$\left[\frac{\partial^2 f'}{\partial \eta^2}\right]_w$
-0,010	10	6,71	18	-0,100	50	0,3837	0,8081	0,1394
					100	0,4340	2,2058	0,7606
					150	0,4433	2,6556	1,3736
					200	0,4419	2,8421	1,9601
					250	0,4369	2,9239	2,5206
					300	0,4307	2,9562	3,0581
					350	0,4241	2,9557	3,5671
					400	0,4176	2,9552	4,0761
					450	0,4113	2,9393	4,5614
					500	0,4052	2,9193	5,0333
	12	7,42	22	-0,120	50	0,3778	1,3860	0,2390
					100	0,4280	2,8345	0,9774
					150	0,4374	3,2908	1,7021
					200	0,4362	3,4722	2,3946
					250	0,4313	3,5450	3,0561
					300	0,4253	3,5716	3,6912
					350	0,4190	3,5729	4,3031
					400	0,4123	3,5463	4,8915
					450	0,4061	3,5213	5,4641
					500	0,4002	3,4922	6,0210
	14	8,06	26	-0,14	50	0,3716	1,9476	0,3358
					100	0,4220	3,4467	1,1885
					150	0,4315	3,9096	2,0222
					200	0,4304	4,0862	2,8180
					250	0,4257	4,1504	3,5779
					300	0,4195	4,1542	4,3020
					350	0,4130	4,1363	5,0004
					400	0,4068	4,1131	5,6803
					450	0,4008	4,0846	6,3414
					500	0,3951	4,0507	6,9839

β	$\frac{T_{eo}}{T_e}$	M_e	$\frac{u_e^2}{C_p T_e}$	β^*	T_e	f''_w	θ'_w	$(\frac{\theta'}{\theta})_w$
-0,015	4	3,87	6	-0,06	50	0,3605	-1,0429	-0,1798
					100	0,4284	0,1917	0,0661
					150	0,4435	0,6257	0,3237
					200	0,4450	0,8321	0,5739
					250	0,4416	0,9445	0,8142
					300	0,4363	1,0103	1,0451
					350	0,4306	1,0564	1,2682
					400	0,4246	1,0828	1,4835
					450	0,4182	1,0897	1,6909
					500	0,4124	1,0982	1,8935
	6	5	10	-0,090	50	0,3510	-0,4634	-0,0799
					100	0,4193	0,8358	0,2882
					150	0,4346	1,2811	0,6627
					200	0,4363	1,4845	1,0238
					250	0,4331	1,5890	1,3698
					300	0,4280	1,6452	1,7020
					350	0,4224	1,6777	2,0223
					400	0,4163	1,6901	2,3311
					450	0,4105	1,6956	2,6310
					500	0,4048	1,6951	2,9226
	8	5,92	14	-0,120	50	0,3414	0,0917	0,0159
					100	0,4110	1,4550	0,5017
					150	0,4257	1,9118	0,9889
					200	0,4276	2,1125	1,4569
					250	0,4246	2,2096	1,9048
					300	0,4197	2,2568	2,3346
					350	0,4143	2,2799	2,7490
					400	0,4084	2,2828	3,1487
					450	0,4027	2,2792	3,5367
					500	0,3971	2,2701	3,9140

β	$\frac{T_{eo}}{T_e}$	M_e	$\frac{u_e^2}{C_p T_e}$	β^*	T_e	f''_w	θ'_w	$(\frac{\theta'}{\theta})_w$
-0,015	10	6,71	18	-0,150	50	0,3316	0,6230	0,1074
					100	0,4008	2,0494	0,7067
					150	0,4166	2,5178	1,3023
					200	0,4188	2,7162	1,8733
					250	0,4160	2,8063	2,4192
					300	0,4114	2,8450	2,9430
					350	0,4061	2,8591	3,4481
					400	0,4003	2,8529	3,9351
					450	0,3948	2,8407	4,4080
					500	0,3894	2,8234	4,8679
	12	7,42	22	-0,180	50	0,3217	1,1300	0,1948
					100	0,3914	2,6189	0,9031
					150	0,4075	3,0991	1,6030
					200	0,4099	3,2957	2,2729
					250	0,4074	3,3793	2,9132
					300	0,4032	3,4164	3,5284
					350	0,3983	3,4256	4,1211
					400	0,3923	3,4006	4,6904
					450	0,3869	3,3801	5,2449
					500	0,3816	3,3549	5,7843
	14	8,06	26	-0,210	50	0,3116	1,6128	0,2781
					100	0,3819	3,1635	1,0909
					150	0,3983	3,6556	1,8908
					200	0,4009	3,8508	2,6557
					250	0,3987	3,9284	3,3865
					300	0,3948	3,9623	4,0897
					350	0,3907	3,9780	4,7699
					400	0,3858	3,9669	5,4255
					450	0,3801	3,9291	6,0566
					500	0,3737	3,8646	6,6632

β	$\frac{T_{eo}}{T_e}$	M_e	$\frac{u_e^2}{C_p T_e}$	β^*	T_e	f''_w	θ'_w	$\left(\frac{\theta'}{\theta}\right)_w$
-0,020	4	3,87	6	-0,080	50	0,3168	-1,0628	-0,1832
					100	0,4044	0,1625	0,0560
					150	0,4259	0,5997	0,3102
					200	0,4307	0,8089	0,5578
					250	0,4293	0,9233	0,7960
					300	0,4254	0,9907	1,0249
					350	0,4208	1,0382	1,2460
					400	0,4156	1,0657	1,4596
					450	0,4097	1,0732	1,6653
					500	0,4044	1,0882	1,8662
	6	5	10	-0,120	50	0,3030	-0,5286	-0,0911
					100	0,3917	0,7725	0,2663
					150	0,4138	1,2260	0,6341
					200	0,4189	1,4349	0,9846
					250	0,4178	1,5434	1,3305
					300	0,4142	1,6027	1,6580
					350	0,4093	1,6272	1,9681
					400	0,4044	1,6518	2,2783
					450	0,3992	1,6588	2,5740
					500	0,3941	1,6596	2,8614
	8	5,92	14	-0,160	50	0,2890	-0,0268	-0,0046
					100	0,3789	1,3491	0,4652
					150	0,4014	1,8190	0,9409
					200	0,4069	2,0283	1,3988
					250	0,4062	2,1315	1,8375
					300	0,4029	2,1833	2,2585
					350	0,3982	2,1995	2,6574
					400	0,3936	2,2158	3,0562
					450	0,3886	2,2146	3,4365
					500	0,3836	2,2076	3,8063

β	$\frac{I_{eo}}{T_e}$	M_e	$\frac{u_e^2}{C_0 T_e}$	β^*	T_e	f''_w	θ'_w	$\left(\frac{\theta'}{\theta}\right)_w$
-0,020	10	6,71	18	-0,200	50	0,2744	0,4422	0,0762
					100	0,3658	1,8921	0,6525
					150	0,3889	2,3788	1,2204
					200	0,3948	2,5890	1,7855
					250	0,3944	2,6875	2,3168
					300	0,3914	2,7324	2,8267
					350	0,3870	2,7410	3,3096
					400	0,3826	2,7496	3,7925
					450	0,3826	2,7496	3,7925
					500	0,3731	2,7264	4,7007
	12	7,42	22	-0,240	50	0,2592	0,8777	0,1513
					100	0,3525	2,4014	0,8281
					150	0,3762	2,9052	1,5027
					200	0,3825	3,1170	2,1497
					250	0,3825	3,2115	2,7685
					300	0,3800	3,2548	3,3630
					350	0,3765	3,2696	3,9360
					400	0,3715	3,2531	4,4870
					450	0,3670	3,2372	5,0232
					500	0,3624	3,2159	5,5447
	14	8,06	26	-0,28	50	0,2434	1,2788	0,2205
					100	0,3389	2,8765	0,9919
					150	0,3633	3,3979	1,7576
					200	0,3700	3,6120	2,4911
					250	0,3704	3,7031	3,1924
					300	0,3670	3,7144	3,8568
					350	0,3634	3,7173	4,5037
					400	0,3596	3,7119	5,1378
					450	0,3557	3,6982	5,7443
					500	0,3516	3,6761	6,3381

$\tilde{\beta}$	$\frac{T_{eo}}{T_e}$	M_e	$\frac{u_e^2}{C_p T_e}$	β^*	T_e	f''_w	θ'_w	$(\frac{\theta'}{\theta})_w$
-0,025	4	3,87	6	-0,100	50	0,2698	-1,0772	-0.1857
					100	0,3794	0,1337	0,0460
					150	0,4079	0,5737	0,2967
					200	0,4160	0,7855	0,5417
					250	0,4168	0,9020	0,7776
					300	0,4143	0,9710	1,0045
					350	0,4108	1,0197	1,2237
					400	0,4064	1,0482	1,4354
					450	0,4010	1,0566	1,6395
					500	0,3962	1,0664	1,8387
	6	5	10	-0,150	50	0,2506	-0,5871	-0,1012
					100	0,3629	0,7093	0,2446
					150	0,3922	1,1704	0,6054
					200	0,4009	1,3849	0,9551
					250	0,4021	1,4974	1,2909
					300	0,4000	1,5597	1,6135
					350	0,3961	1,5864	1,9192
					400	0,3922	1,6130	2,2249
					450	0,3877	1,6216	2,5163
					500	0,3831	1,6238	2,7997
	8	5,92	14	-0,200	50	0,2303	-0,1385	-0,0239
					100	0,3460	1,2426	0,4285
					150	0,3762	1,7252	0,8923
					200	0,3855	1,9431	1,3401ù
					250	0,3872	2,0525	1,7694
					300	0,3855	2,1089	2,1816
					350	0,3819	2,1284	2,5722
					400	0,3783	2,1480	2,9627
					450	0,3741	2,1493	3,3351
					500	0,3698	2,1444	3,6972

β	$\frac{T_{eo}}{T_e}$	M_e	$\frac{u_e^2}{C_p T_e}$	β^*	T_e	f''_w	θ'_w	$(\frac{\theta'}{\theta})_w$
-0,025	10	6,71	18	-0,250	50	0,2086	0,2671	0,0461
					100	0,2912	1,2201	0,3155
					150	0,3598	2,2379	1,1575
					200	0,3698	2,4601	1,6966
					250	0,3720	2,5671	2,2130
					300	0,3708	2,6184	2,7087
					350	0,3675	2,6316	3,1870
					400	0,3643	2,6448	3,6480
					450	0,3603	2,6396	4,0958
					500	0,3563	2,6281	4,5313
	12	7,42	22	-0,300	50	0,1849	0,6272	0,1081
					100	0,3105	2,1799	0,7517
					150	0,3430	2,7078	1,4006
					200	0,3538	2,9353	2,0243
					250	0,3565	3,0409	2,6214
					300	0,3563	3,0977	3,1959
					350	0,3548	3,1290	3,7506
					400	0,3515	3,1272	4,2847
					450	0,3463	3,0920	4,7980
					500	0,3425	3,0748	5,3014
	14	8,06	26	-0,35	50	0,1580	0,9362	0,1616
					100	0,2917	2,5819	0,8903
					150	0,3256	3,1342	1,6211
					200	0,3372	3,3680	2,3228
					250	0,3406	3,4732	2,9942
					300	0,3438	3,5711	3,6447
					350	0,3442	3,6210	4,2713
					400	0,3418	3,6232	4,8739
					450	0,3365	3,5776	5,4525
					500	0,3284	3,4841	6,0071

β	$\frac{T_{eo}}{T_e}$	M_e	$\frac{u_e^2}{C_p T_e}$	β^*	T_e	f'_w	θ'_w	$\left(\frac{\theta'}{\theta}\right)_w$
-0,050	4	3,87	6	-0,200	50			
					100			
					150	0,3077	0,4412	0,2282
					200	0,3327	0,6447	0,4592
					250	0,3492	0,7920	0,6827
					300	0,3547	0,8689	0,8989
					350	0,3565	0,9177	1,1076
					400	0,3563	0,9494	1,3096
					450	0,3548	0,9702	1,5055
					500	0,3527	0,9837	1,6960
	6	5	10	-0,30	50			
					100			
					150	0,2680	0,8821	0,4562
					200	0,2963	1,1011	0,7756
					250	0,3153	1,2576	1,0841
					300	0,3222	1,3555	1,3815
					350	0,3251	1,3825	1,6686
					400	0,3258	1,4111	1,9463
					450	0,3252	1,4279	2,2157
					500	0,3237	1,4370	2,4776
	8	5,92	14	-0,400	50			
					100			
					150	0,2229	1,2245	0,6334
					200	0,1970	1,4702	1,0281
					250	0,2185	1,6339	1,4086
					300	0,2873	1,7156	1,7747
					350	0,3228	1,7713	2,1288
					400	0,3248	1,8011	2,4709
					450	0,2937	1,8050	2,8008
					500	0,2930	1,8114	3,1130

β	$\frac{T_{eo}}{T_e}$	M_e	$\frac{u_e^2}{C_p T_e}$	β^x	T_e	f'_w	θ'_w	$(\frac{\theta'}{\theta})_w$
-0,050	10	6,71	18	-0,500	50			
					100			
					150	0,1656	1,4438	0,7468
					200	0,2094	1,7254	1,2065
					250	0,2369	1,9112	1,6476
					300	0,2485	2,0011	2,0701
					350	0,2561	2,0618	2,4783
					400	0,2597	2,0934	2,8723
					450	0,2594	2,0958	3,2521
					500	0,2597	2,1014	3,6230
	12	7,42	22	-0,600	50			
					100			
					150			
					200			
					250	0,1853	2,0612	1,7769
					300	0,2021	2,1709	2,2457
					350	0,2135	2,2450	2,6973
					400	0,2195	2,2836	3,1314
					450	0,2201	2,2867	3,5483
					500	0,2218	2,2945	3,9561
	14	8,06	26	-0,700	50			
					100			
					150			
					200			
					250			
					300	0,1297	2,1244	2,1977
					350	0,1472	2,2206	2,6934
					400	0,1604	2,2908	3,1687
					450	0,1692	2,3352	3,6236
					500	0,1737	2,3637	4,0582

β	$\frac{T_{eo}}{T_e}$	M_e	$\frac{u_e^2}{c_p T_e}$	β^*	$\bar{t}_w$	f''_w	β'_w	$\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)_w$
-0,075	4	3,87	4	-0,300	50			
					100			
					150	0,1744	0,3007	0,1555
					200	0,2305	0,5203	0,3704
					250	0,2692	0,6730	0,5801
					300	0,2855	0,7585	0,7846
					350	0,2946	0,8142	0,9826
					400	0,2998	0,8515	1,1745
					450	0,3025	0,8769	1,3607
					500	0,3037	0,8983	1,5419
	6	5	10	-0,450	50			
					100			
					150			
					200			
					250	0,1999	0,9806	0,8453
					300	0,2229	1,0801	1,1173
					350	0,2362	1,1431	1,3796
					400	0,2443	1,1841	1,6552
					450	0,2493	1,2110	1,8791
					500	0,2540	1,2397	2,3512
	8	5,92	14	-0,600	50			
					100			
					150			
					200			
					250			
					300	0,1253	1,1831	1,[illegible]
					350	0,1498	1,2705	1,5441
					400	0,1684	1,3370	1,8513
					450	0,1810	1,3827	2,1456
					500	0,1877	1,4075	2,4268

β	$\frac{T_{eo}}{T_e}$	M_e	$\frac{u_e^2}{C_p T_e}$	β^*	T_e	f''_w	θ'_w	$(\frac{\theta'}{\theta})_w$
-0,100	4	3,87	6	-0,400	50			
					100			
					150			
					200			
					250	0,1576	0,5305	0,4574
					300	0,1955	0,6301	0,6518
					350	0,2171	0,6955	0,8394
					400	0,2306	0,7403	1,0211
					450	0,2393	0,7716	1,1973
					500	0,2452	0,7939	1,3687
	6	5	10	-0,600	50			
					100			
					150			
					200			
					250			
					300			
					350			
					400			
					450	0,1228	0,9018	1,3994
					500	0,1413	0,9462	1,6313
	8	5,92	14	-0,800	50			
					100			
					150			
					200			
					250			
					300			
					350			
					400			
					450			
					500			

β	$\frac{T_{oe}}{T_e}$	M_e	$\frac{u_e^2}{C_p T_e}$	β^*	T_e	f''_w	θ'_w	$(\frac{\theta'}{\theta})_w$
-0,125	4	3,87	6	-0,500	50			
					100			
					150			
					200			
					250			
					300			
					350			
					400	0,1189	0,5838	0,8053
					450	0,1466	0,6331	0,9824
					500	0,1634	0,6662	1,1486
	6	5	10	-0,750	50			
					100			
					150			
					200			
					250			
					300			
					350			
					400			
					450			
					500			
	8	5,92	14	-1,000	50			
					100			
					150			
					200			
					250			
					300			
					350			
					400			
					450			
					500			

ANNEXE II

Le paramètre de gradient de pression β nul sur la pointe conique des modèles, prend des valeurs finies sur la jupe à méridienne circulaire ; il existe donc une discontinuité au raccordement cône-jupe dans la répartition de β en fonction de l'abscisse curviligne s. Le calcul qui suit montre l'influence de la géométrie des modèles et des grandeurs caractéristiques de l'écoulement sur l'importance de cette discontinuité.

Comme on le sait $\beta = \frac{2\xi}{u_e} \cdot \frac{du_e}{d\xi}$ où $\xi = \int_o^s \rho_e \mu_e u_e r^2 ds$

En considérant que la paroi des modèles est une ligne de courant, il est possible de calculer les grandeurs ρ, u, T à l'aide des relations d'isentropie à partir de la répartition de pression, et si pour cette répartition on choisit celle déduite de l'approximation de Newton-Buseman, il est possible alors de calculer analytiquement β.

Le calcul basé sur l'approximation de Newton-Buseman donne :

$$\frac{p_e}{p_\infty} = F_s = 1 + \gamma M_\infty^2 \left\{ \sin^2\alpha + \frac{1}{6r} \left[3r_w (\sin^2\alpha - \sin^2\sigma) + 2R (\cos^3\alpha - \cos^3\sigma) \right] \right\}$$

où σ est le demi-angle de la pointe conique

α angle de la tangente à la méridienne $= \sigma + \frac{s - s_j}{R} = \sigma + \frac{S}{R}$

r rayon d'une section droite $= s_j \sin\sigma + R(\cos\sigma - \cos\alpha)$

r_w ordonnée du centre de courbure des méridiennes

$= s_o \sin\sigma + R\cos\sigma$

d'où l'on déduit pour $\gamma = 1{,}4$

$$T_e = T_{\infty o}\, A\, (F_s)^{2/7} \qquad \text{avec} \qquad A = \left(\frac{p_{eo}}{p_\infty}\right)^{-2/7}$$

$$\rho_e = p\ \left(\mathcal{R} T_{\infty o}\, A\right)^{-1}\ (F_s)^{5/7}$$

$$u_e = (7\,\mathcal{R} T_{\infty o})^{1/2}\ \left[1 - A\,(F_s)^{2/7}\right]^{1/2}$$

Pour les températures T_o choisies, la plage des températures T_e est telle que la viscosité μ_e est sensiblement proportionnelle à T_e.

$$\mu_e = K\, A\, T_{\infty o}\, (F_s)^{2/7} \qquad \text{avec} \qquad K \simeq 7 \cdot 10^{-7} \text{ cgs}$$

En se plaçant sur la jupe au voisinage de la jonction cône - jupe ($S \to 0$) et pour un corps élancé (σ petit) les relations F_s et r deviennent en les exprimant en fonction de σ, R et $\frac{S}{R} = \frac{s - s_j}{R}$:

$$F_s \simeq 1 + \gamma\, M_\infty^2\, \sigma\, (\sigma + 3\,\frac{S}{R})$$

$$r \simeq \sigma\, (s_j + S)$$

d'où le produit

$$\rho_e\, \mu_e\, u_e\, r^2 \simeq K\, \left(\frac{7\, T_{\infty o}}{\mathcal{R}}\right)^{1/2}\ p_\infty \sigma^2\, F_s \left[1 - A(F_s)\right]^{2/7\ \ 1/2}\ (s_j + S)^2$$

lorsque $M \gtrsim 4$; $A(F_s)^{2/7}$ est petit devant 1, il vient alors pour $S \to 0$

$$\rho_e\, \mu_e\, u_e\, r^2 \simeq K \left(\frac{7\, T_{\infty o}}{\mathcal{R}}\right)^{1/2}\ p_\infty \sigma^2\, s_j \left[1 + \gamma M_\infty^2\, \sigma(\sigma + 3\,\frac{S}{R})\right] \times$$

$$\left\{1 - \frac{A}{2}\left[1 + \gamma\, M^2\, \sigma(\sigma + 3\,\frac{S}{R})\right]^{2/7}\right\}\ (s_j + 2 s_j\, S)$$

qui permet de calculer $\xi = \int_o^S \rho_e \mu_e u_e r^2 ds$

mais sur la pointe cônique $\rho_e \mu_e u_e$ sont constantes et

$$\xi = \xi_o + \int_o^S \rho_e \mu_e u_e r^2 dS \qquad \text{avec} \quad \xi_o = (\rho_e \mu_e u_e)_{\text{cône}} \sigma^2 \frac{s_j^3}{3}$$

$$\xi = K \left(\frac{7 T_{\infty o}}{\mathcal{R}}\right)^{1/2} p_\infty \sigma^2 s_j^2 (1+\gamma M^2 \sigma^2) \left[1 - \frac{A}{2} (1+\gamma M^2 \sigma^2)^{2/7} \right] (S+\frac{s_j}{3})$$

$$\beta = 2 \frac{\xi}{u_e} \frac{du_e}{d\xi} = 2 \frac{\xi}{u_e} \frac{du_e}{dS} \left(\frac{d\xi}{dS}\right)^{-1}$$

$$\frac{1}{u_e} \frac{du_e}{ds} = - \frac{A}{7} \left[1 - \frac{A}{2} (F_S)^{2/7} \right]^{-1} (F_S)^{-5/7} \frac{dF_S}{dS}$$

$$\text{avec} \quad \frac{dF_S}{dS} = \frac{3}{R} \gamma M_\infty^2 \sigma$$

$$\xi \left(\frac{d\xi}{dS}\right)' = S + \frac{s_j}{3}$$

d'où

$$\beta = - \frac{2}{7} \gamma M_\infty^2 \sigma \; A \left[1 - \frac{A}{2} (F_S)^{2/7} \right]^{-1} (F_S)^{-5/7} \left(\frac{s_j}{R} + 3 \frac{S}{R}\right)$$

Si on note F_o la valeur de F_S pour $S = 0$

il vient : $F_S = 1 + \gamma M^2 \sigma^2 + 3 \gamma M_\infty^2 \sigma \frac{S}{R} = F_o + 3\gamma M^2 \sigma \frac{S}{R}$

$$F_S = F_o \left[1 + \frac{3 \gamma M_\infty^2 \sigma}{F_o} \frac{S}{R} \right]$$

En limitant au 1er terme, le développement en série de β en puissances de $\frac{S}{R}$, il vient finalement :

$$\beta = - \frac{2}{7} A \frac{\gamma M_\infty^2 \sigma}{F_o^{5/7} (1 - \frac{1}{2} A F_o^{2/7})} \left\{ \frac{s_j}{R} + 3 \left[1 - \frac{5}{7} \frac{s_j}{R} \frac{\gamma M_\infty^2 \sigma}{F_o^{3/7}} \cdot \frac{1 - \frac{7}{10} A F_o^{2/7}}{1 - \frac{1}{2} A F_o^{2/7}} \right] \frac{S}{R} \right\}$$

$$\beta = - f_{1(M_\infty,\sigma)} \left\{ \frac{s_j}{R} + 3 \left[1 - f_{2(M_\infty,\sigma)} \frac{s_j}{R} \right] \frac{S}{R} \right\}$$

où $$f_1 = \frac{2}{7} A \frac{\gamma M_\infty^2 \sigma}{F_o^{5/7} (1 - \frac{1}{2} A F_o^{2/7})}$$

$$f_2 = \frac{5}{7} \frac{\gamma M_\infty^2 \sigma}{F_o^{3/7}} \frac{1 - \frac{7}{10} A F_o^{-2/7}}{1 - \frac{1}{2} A F_o^{2/7}}$$

$$F_o = 1 + \gamma M_\infty^2 \sigma^2$$

D'une façon identique, il vient pour $\beta^* = \beta \frac{T_{eo}}{T_e}$

$$\beta^* = - \frac{2}{7} \gamma M_\infty^2 \sigma \left(\frac{s_j}{R} + 3 \frac{S}{R} \right) \left\{ F_S \left[1 - \frac{A}{2} (F_S)^{2/7} \right] \right\}^{-1}$$

et en limitant de même au 1er terme le développement :

$$\beta^* = - \frac{2}{7} \frac{\gamma M_\infty^2 \sigma}{F_o (1 - \frac{1}{2} A F_o^{2/7})} \left\{ \frac{s_j}{R} + 3 \left[1 - \frac{s_j}{R} \frac{\gamma M_\infty^2 \sigma}{F_o} \cdot \frac{1 - \frac{9}{14} A F_o^{2/7}}{1 - \frac{1}{2} A F_o^{2/7}} \right] \frac{S}{R} \right\}$$

$$\beta^* = - g_{1(M_\infty,\sigma)} \left\{ \frac{s_j}{R} + 3 \left[1 - g_{2(M_\infty,\sigma)} \frac{s_j}{R} \right] \frac{S}{R} \right\}$$

où $$g_1 = \frac{2}{7} \frac{\gamma M_\infty^2 \sigma}{F_o (1 - \frac{1}{2} A F_o^{2/7})}$$

$$g_2 = \frac{\gamma M_\infty^2 \sigma}{F_o} \frac{1 - \frac{9}{14} A F_o^{2/7}}{1 - \frac{1}{2} A F_o^{2/7}}$$

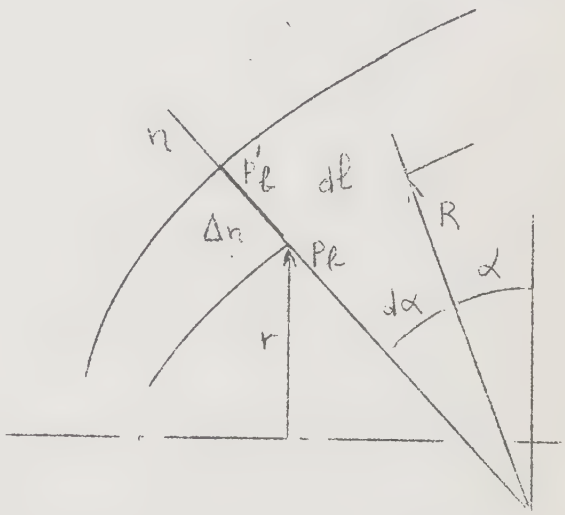
ANNEXE III

RELATION DE NEWTON - BUSEMAN

La répartition du coefficient de pression selon Newton $C_p = 2 \sin^2 \alpha$ applicable à la surface de corps élancés placés dans des écoulements hypersoniques, ne tient pas compte de l'action du gradient de pression transversal sur l'écoulement du gaz dans la couche de choc, dans le cas où le corps présente un rayon de courbure R . Nous donnons ici une démonstration simple de la relation de Newton-Buseman appliquée aux cas particulier des modèles étudiés.

La variation transversale de quantité de mouvement est donnée par :

$$\frac{\partial p}{\partial u} = -\rho \frac{u^2}{R}$$



Comme R = constante

$$p'_b - p_b = -\frac{1}{R} \int_0^{\Delta n} \rho u^2 \, dn$$

D'autre part $d\ell = R \, d\alpha$ d'où

$$\frac{1}{R} = \frac{d\alpha}{dr} \cdot \frac{dr}{d\ell} = \sin\alpha \frac{d\alpha}{dr} = -\frac{d(\cos\alpha)}{dr}$$

La variation longitudinale de quantité de mouvement dans la région comprise entre r et r + dr peut s'exprimer sous la forme :

$$(\rho_\infty \; U_\infty \; r \; dr) \; U_\infty \cos\alpha = d\left[r \int_0^{\Delta n} \rho \, u^2 \, dn \right]$$

soit $$\int_0^{\Delta n} u^2 \, dn = \frac{1}{r} \int_0^{r} \rho \; U_\infty^2 \cos\alpha \; r \; dr$$

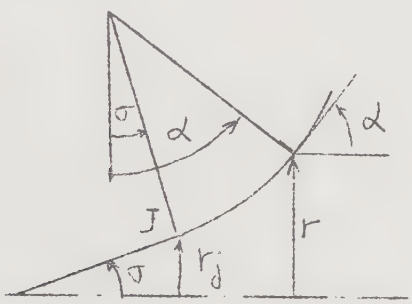
$$\text{d'où} \quad p'_b - p_b = \frac{d(\cos\sigma)}{r\,dr} \int_0^r \rho_\infty U_\infty^2 \cos\alpha \; r \; dr$$

$$\Delta C_p = \frac{p_b - p'_b}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2} = -2\,\frac{d(\cos\sigma)}{r\,dr} \int_0^r \cos\alpha \; r \; dr$$

Il s'en suit l'expression de Newton-Buseman :

$$C_p = 2\left[\sin^2\alpha - \frac{d(\cos\alpha)}{r\,dr} \int_0^r \cos\alpha \,.\, r. \, dr\right]$$

Pour les modèles comportant une pointe conique suivie d'une jupe à méridienne circulaire comme le montre le schéma ci - dessous, cette relation est appliquée à partir du raccordement cône-jupe ($r \geq r_j$)



w centre de courbure

$r = r_w - R\cos\alpha$

d'où $\cos\alpha = \frac{1}{R}(r_w - r)$ et

$$\frac{d(\cos\alpha)}{dr} = -\frac{1}{R}$$

$$C_p = 2\left[\sin^2\alpha + \frac{1}{rR^2} \int_{r_j}^r (r_w - r)\, r \, dr\right]$$

$$C_p = 2\left\{\sin^2\alpha + \frac{1}{2rR^2}\left[r_w\,(r^2 - r_g^{\,2}) - \frac{2}{3}\,(r^3 - r_g^{\,3})\right]\right\}$$

ou encore

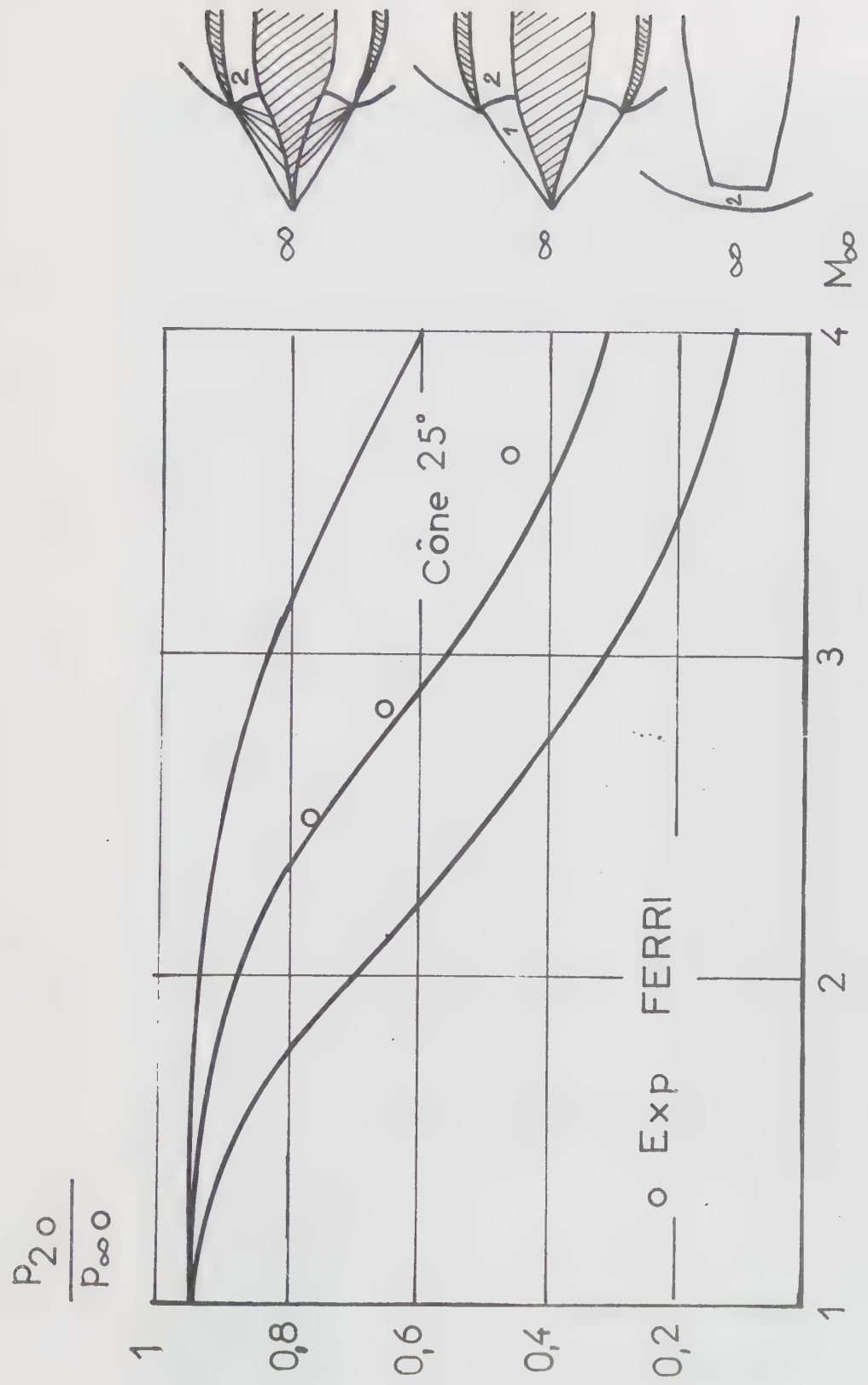
$$C_p = 2\left\{\sin^2\alpha + \frac{1}{6R^2}\left[r\,(3r_w - 2r) - \frac{r_j^{\,2}}{r}\,(3r_w - 2r_j)\right]\right\}$$

Pour les modèles sans pointe conique $r_j = 0$, alors :

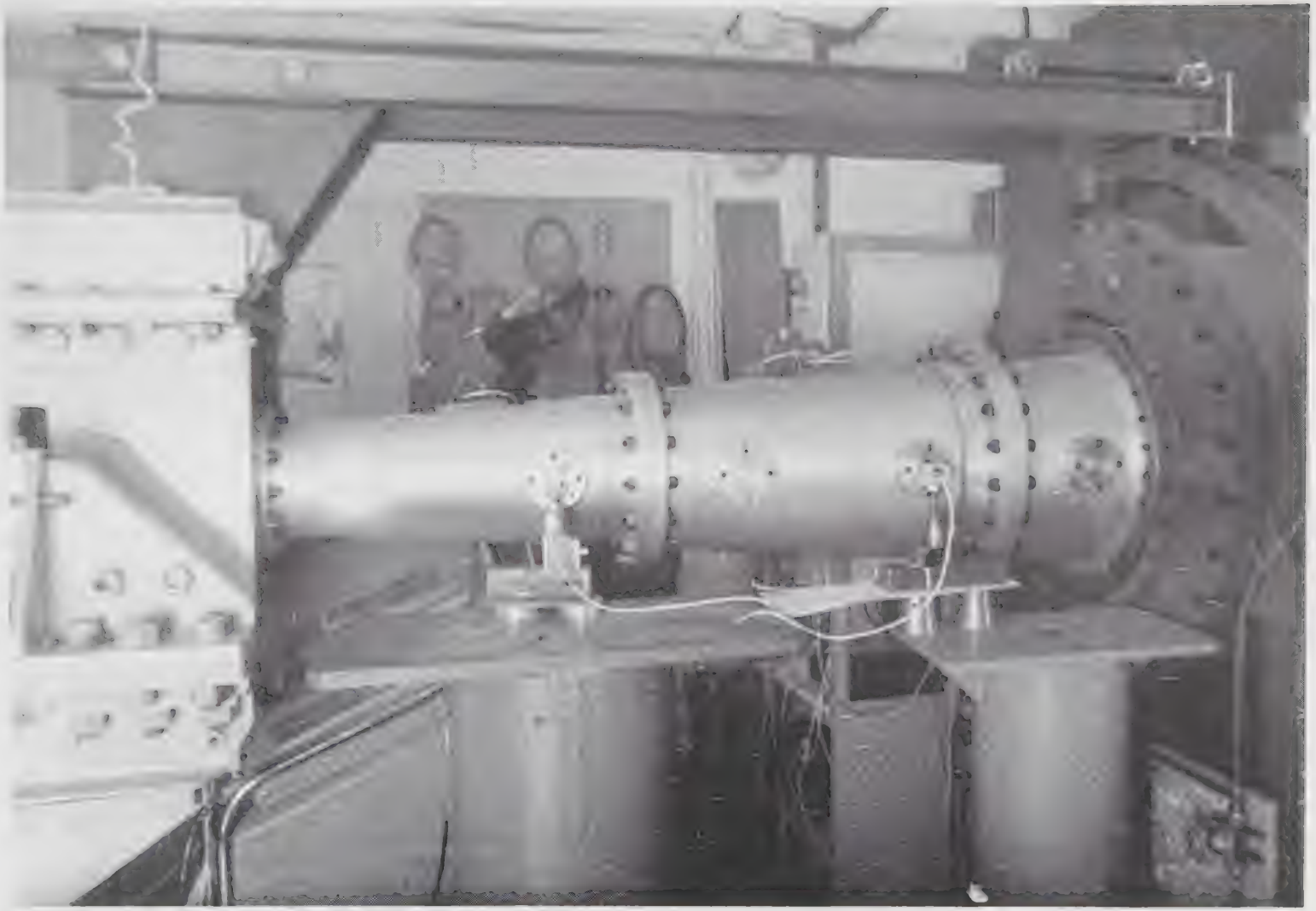
$$C_p = 2 \left[\sin^2 \alpha + \frac{r}{6R^2} \left(3r_w - 2r\right) \right]$$

qui devient, en faisant intervenir le demi-angle σ des méridiennes à la pointe des modèles :

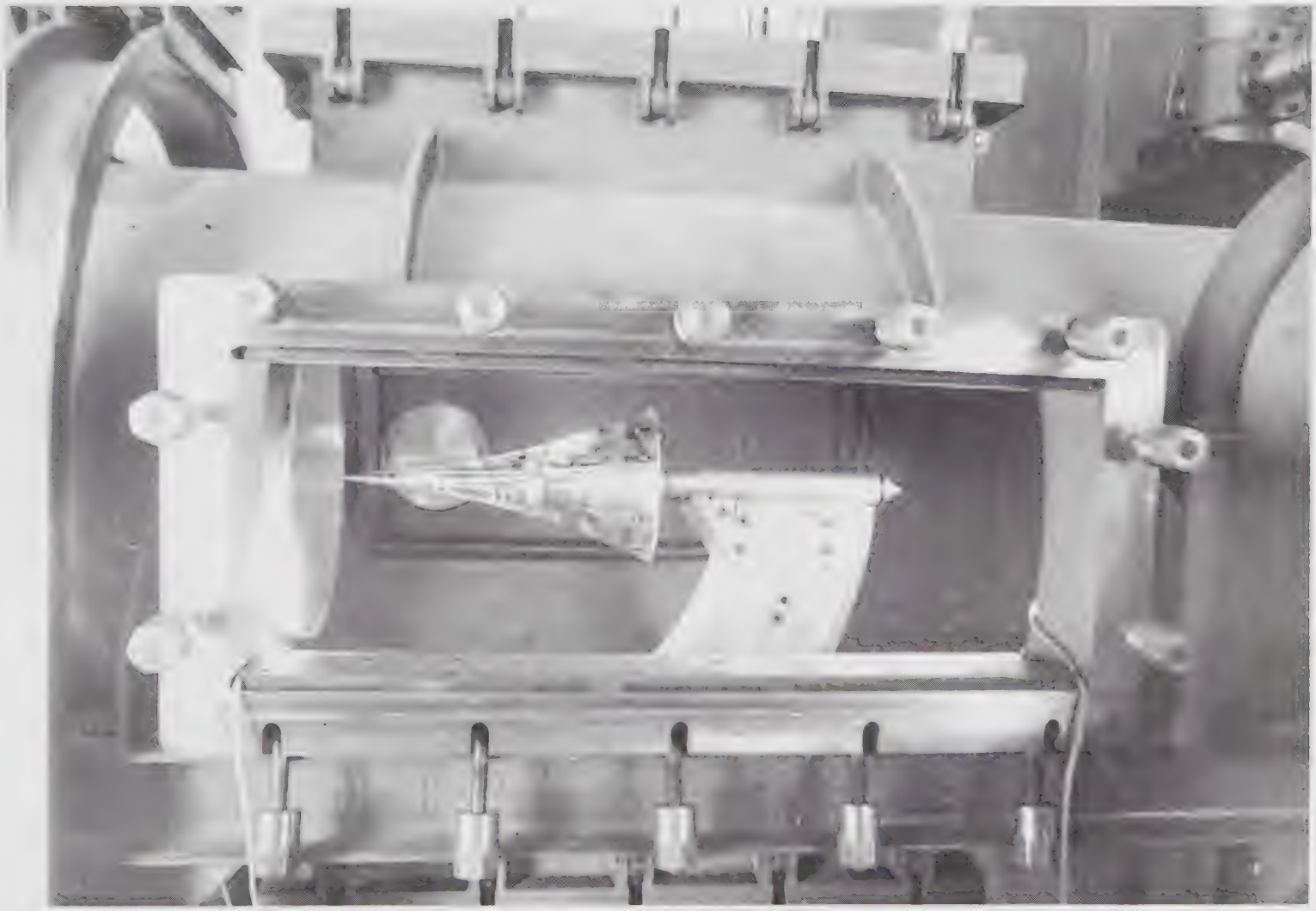
$$C_p = 2 \left(\sin^2 \sigma + \frac{5}{2} \frac{r}{R} \cos \sigma - \frac{4}{3} \frac{r^2}{R^2}\right)$$


$\frac{P_{2o}}{P_{\infty o}}$
1
0,8
0,6
0,4
0,2
1
2
3
4
M_∞
Cône 25°
o Exp FERRI
2
1
2
2
∞
∞
∞

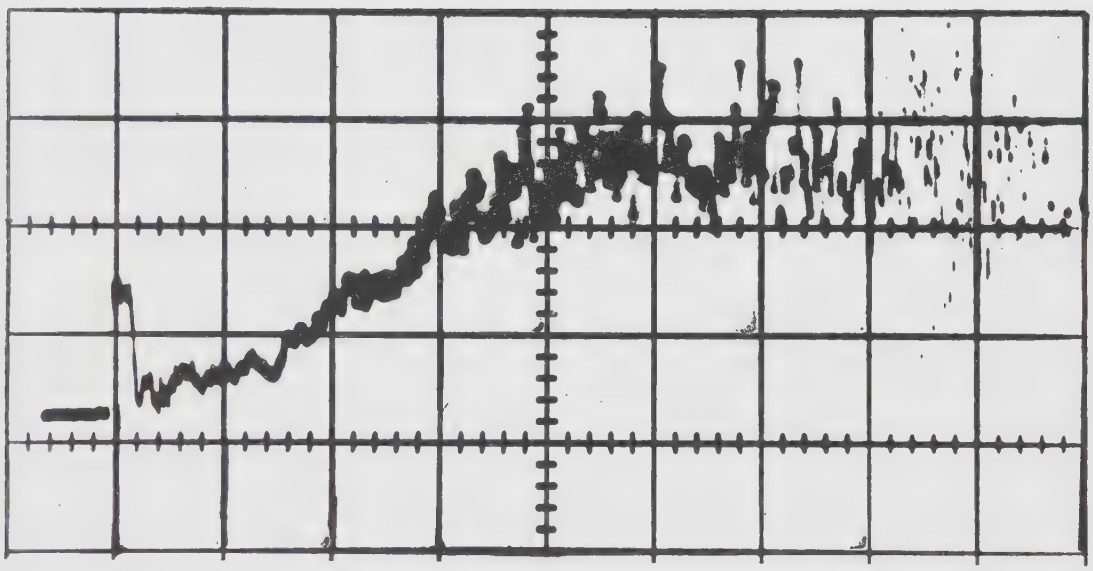
efficacité



Tuyère - Vue du divergent



Modèle dans la veine d'essais



Détente instationnaire

Ecoulement stationnaire

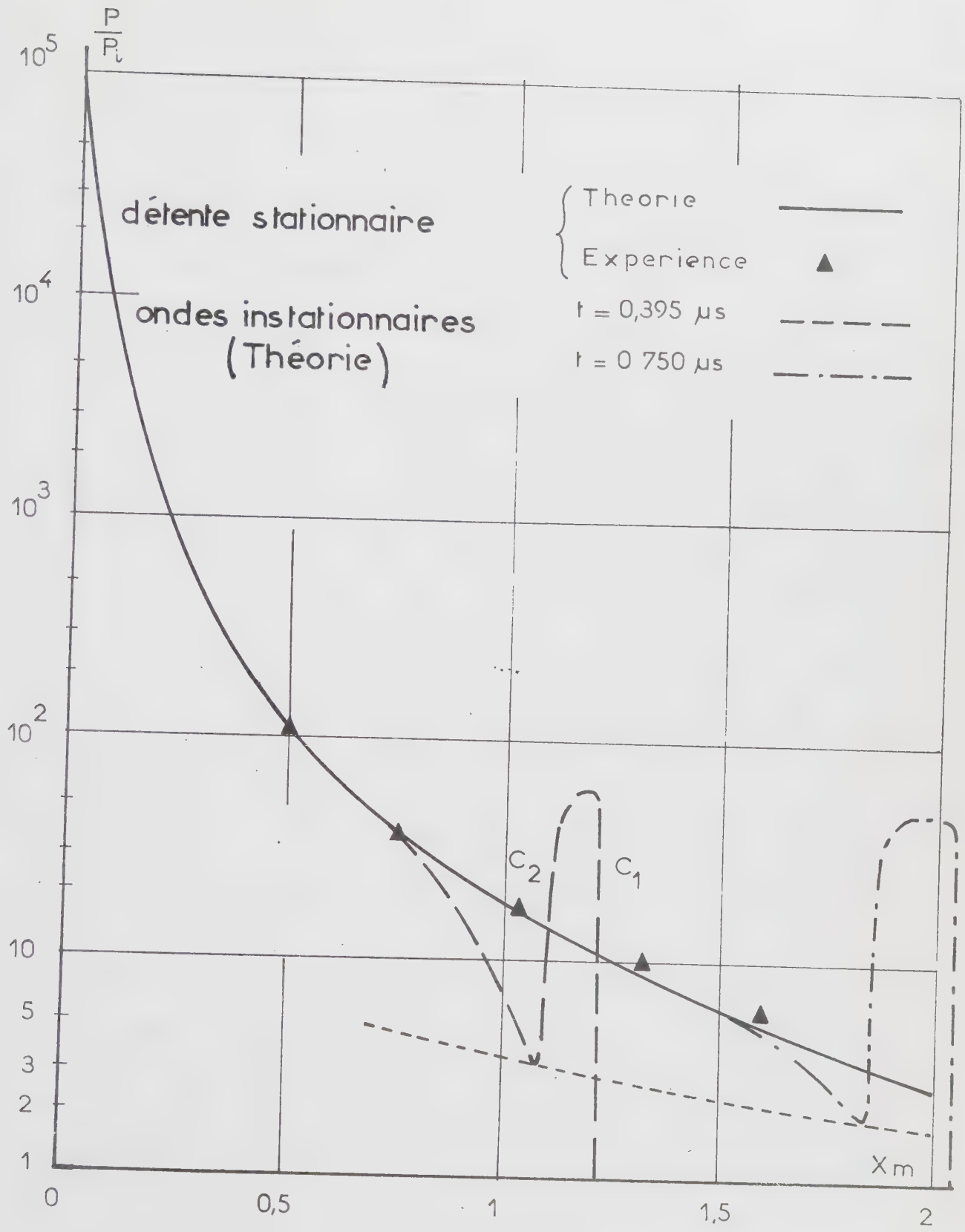
Choc secondaire

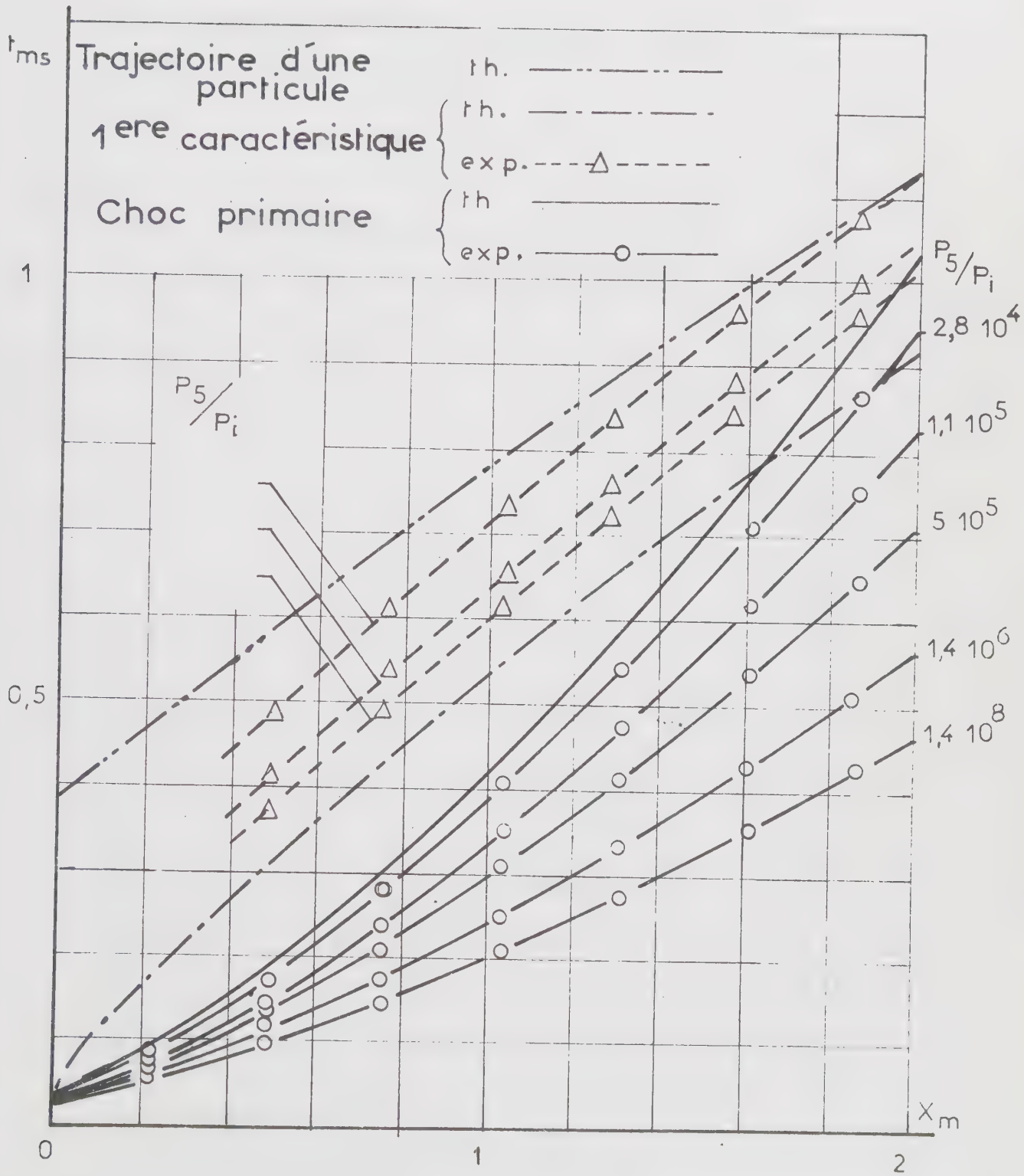
Choc primaire

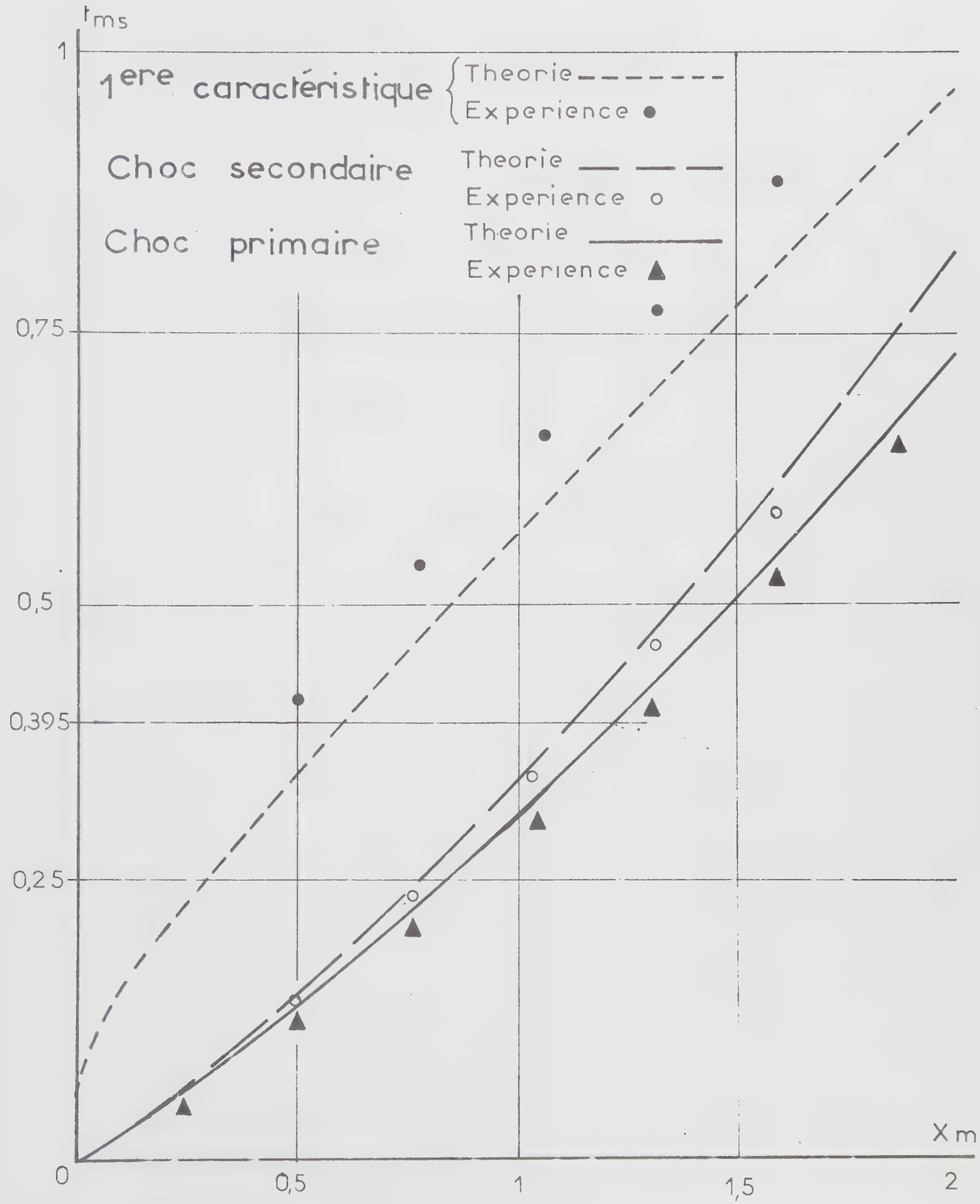
Sensibilité horizontale 50 us / div.

Enregistrement de la pression à la paroi de la tuyère

$M_{oo} = 10$ $P_{ooO} = 184$ bars $T_{ooO} = 4020^{o}$ K


P/Pi
10^5
10^4
10^3
10^2
10
5
3
2
1
détente stationnaire
ondes instationnaires
(Théorie)
Theorie
Experience
t = 0,395 µs
t = 0 750 µs
C2
C1
Xm
0
0,5
1
1,5
2


t_{ms}
Trajectoire d'une particule
1 ere caractéristique
th.
th.
exp.
Choc primaire
th
exp.
1
0,5
0
1
2
X_m
P_5/P_i
P_5/P_i
2,8 10^4
1,1 10^5
5 10^5
1,4 10^6
1,4 10^8


t ms
1
0,75
0,5
0,395
0,25
0
0,5
1
1,5
2
X m
1ere caractéristique
Theorie
Experience
Choc secondaire
Theorie
Experience
Choc primaire
Theorie
Experience

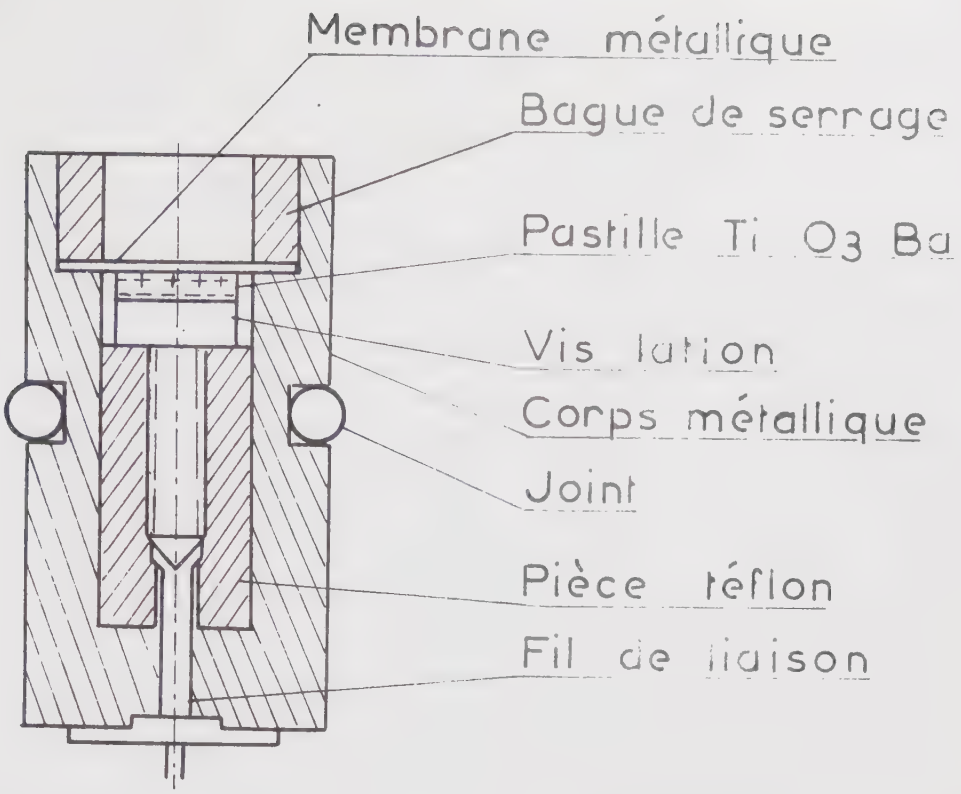
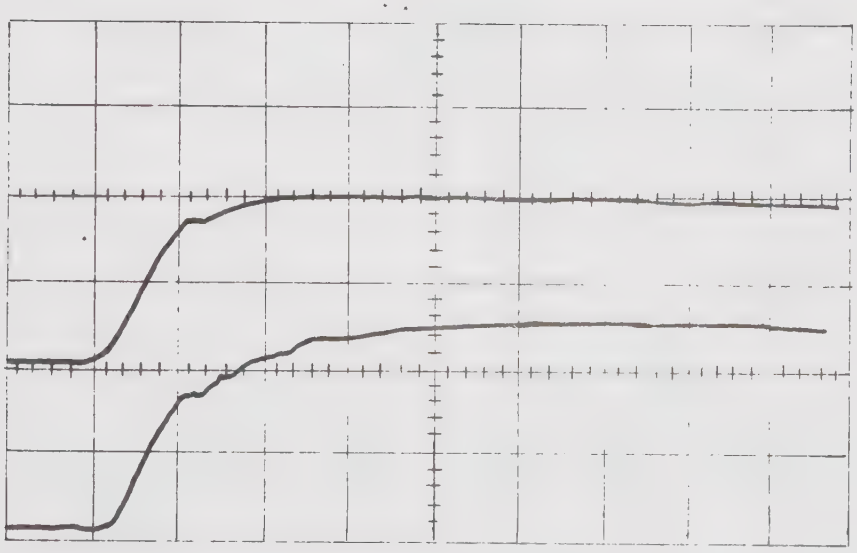
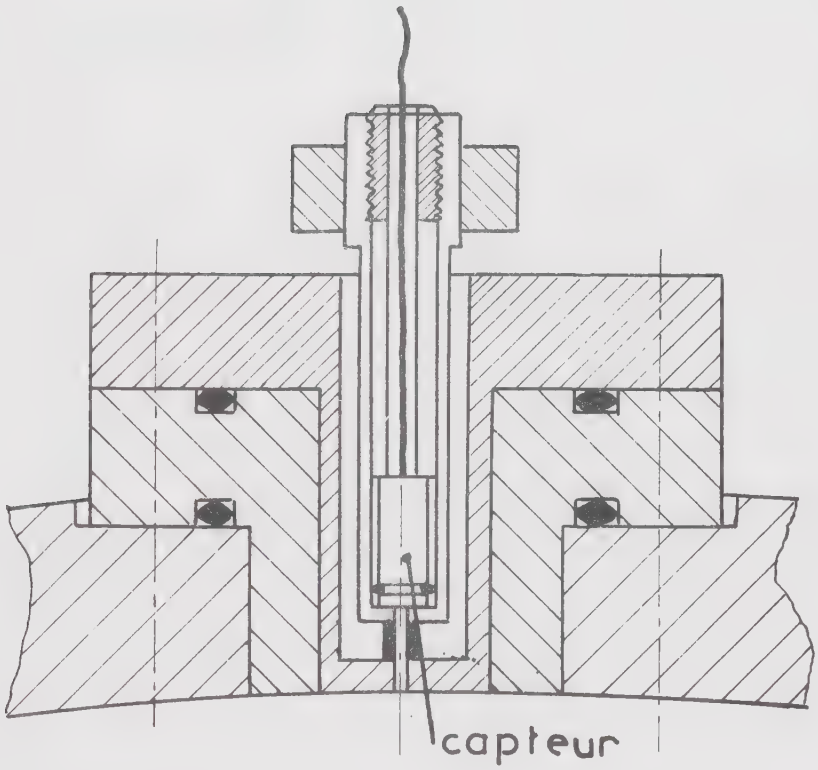


Schéma d'un capteur piézoélectrique



Exemples d'oscillogrammes de pression d'arrêt dans la veine

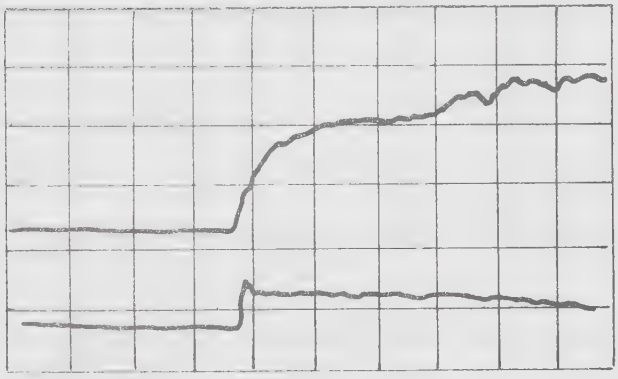
Balayage = 500 µ s/c
Sensibilité = 200 mv/c



Capteur piezometrique
pression à la paroi de la tuyère

capteur en paroi

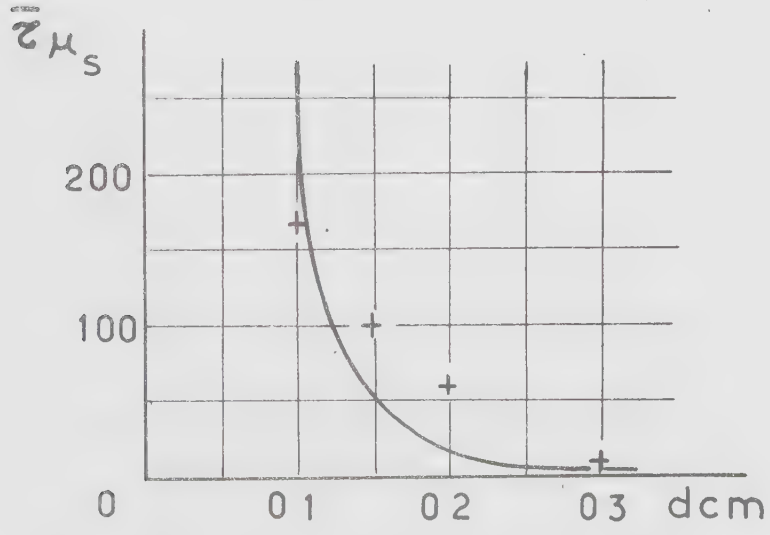
tube ø 3mm



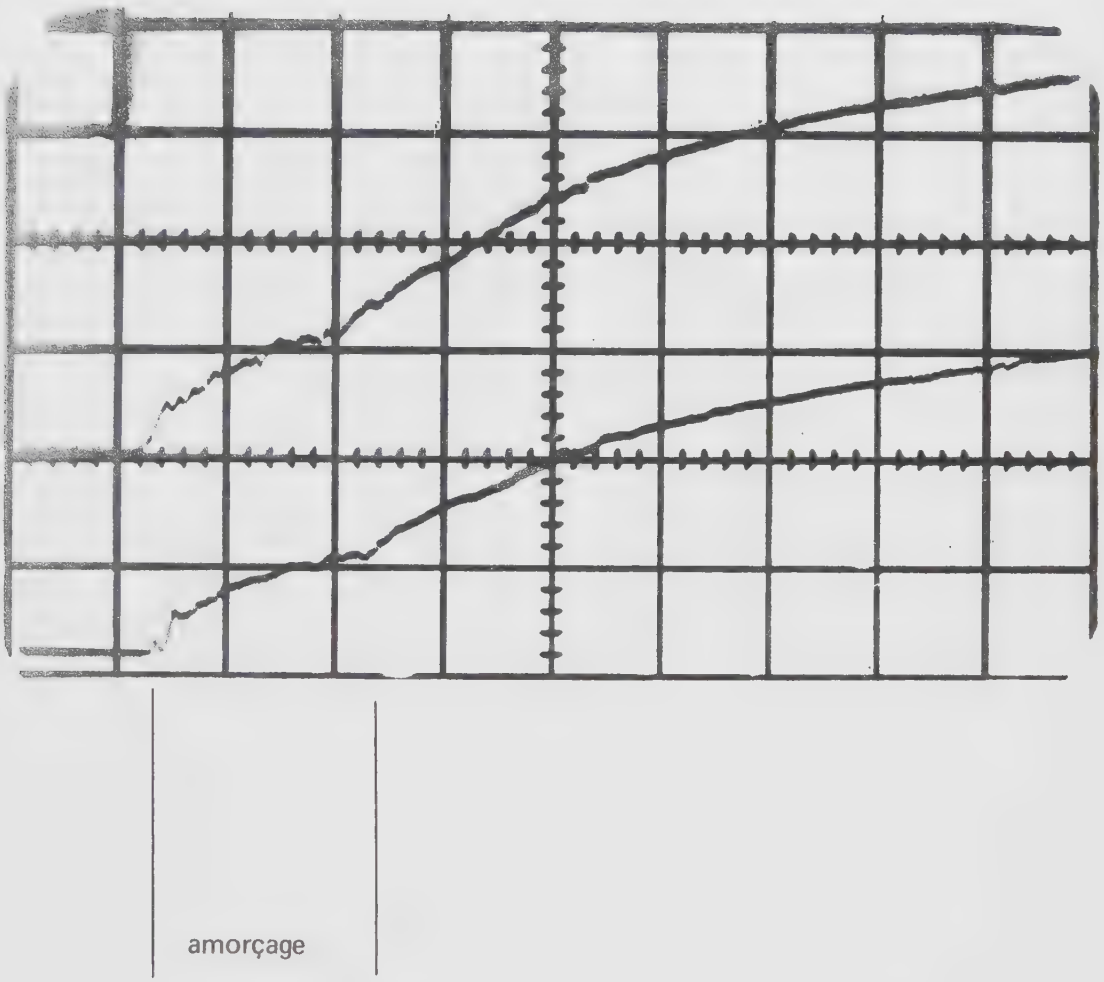
tube ø1mm

référence

balayage 100 µs/c



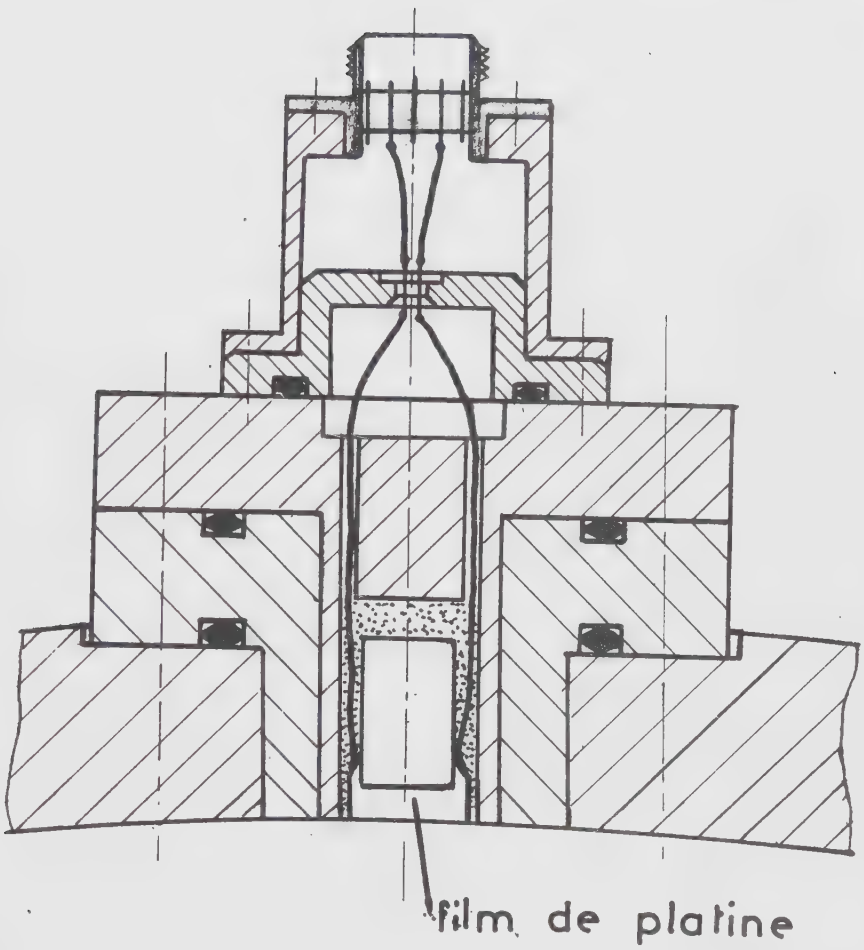
Influence du diamètre du tube sur le temps de réponse des capteurs



Sensibilité horizontale 300 us / div.

Enregistrement du transfert de chaleur à la paroi d'un cône à pointe vive

$M_{oo} = 10$ $P_{ooO} = 184$ bars $T_{ooO} = 4020^{o}$ K



Sonde thermométrique
transfert à la paroi de la tuyère.

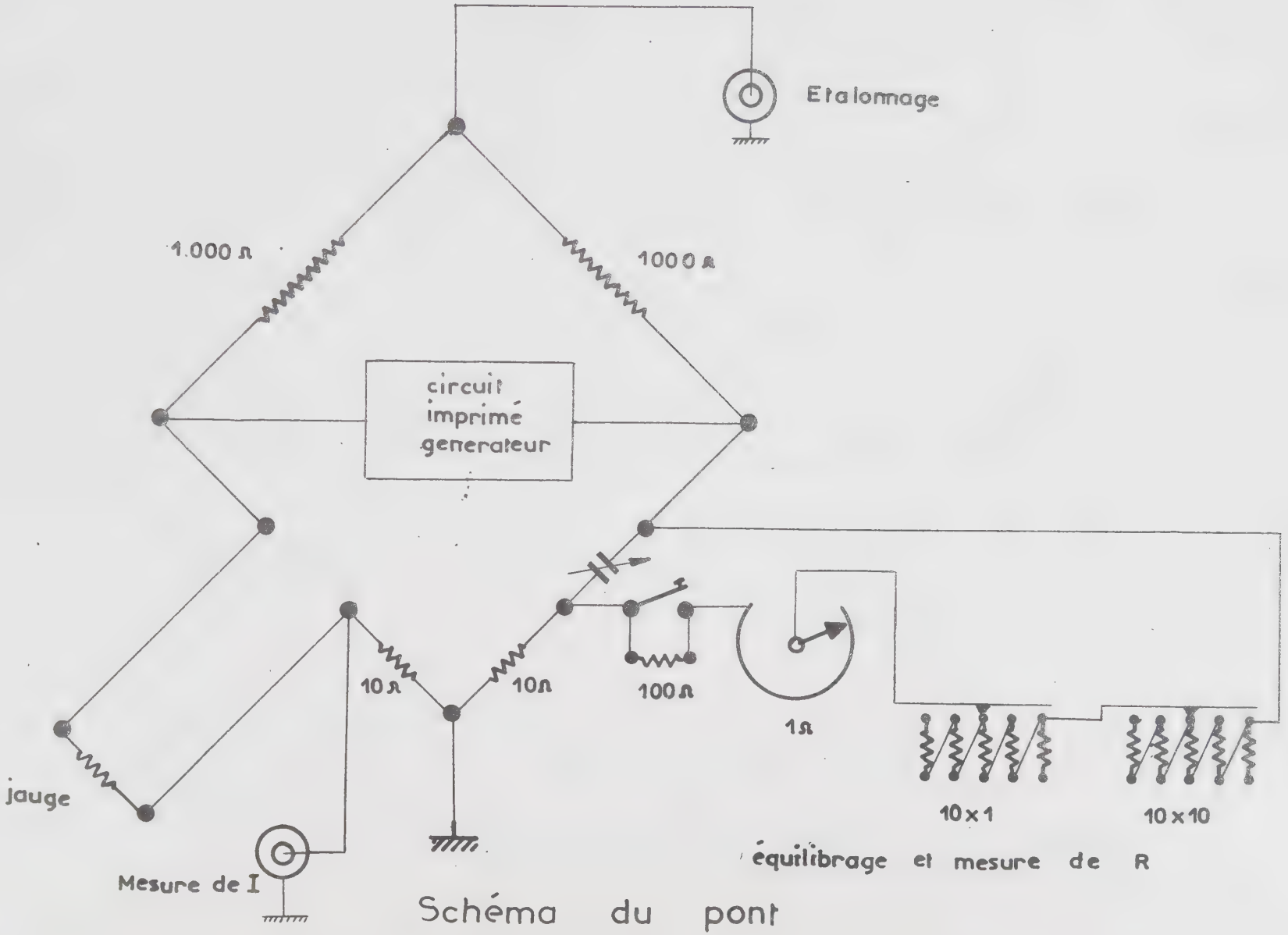
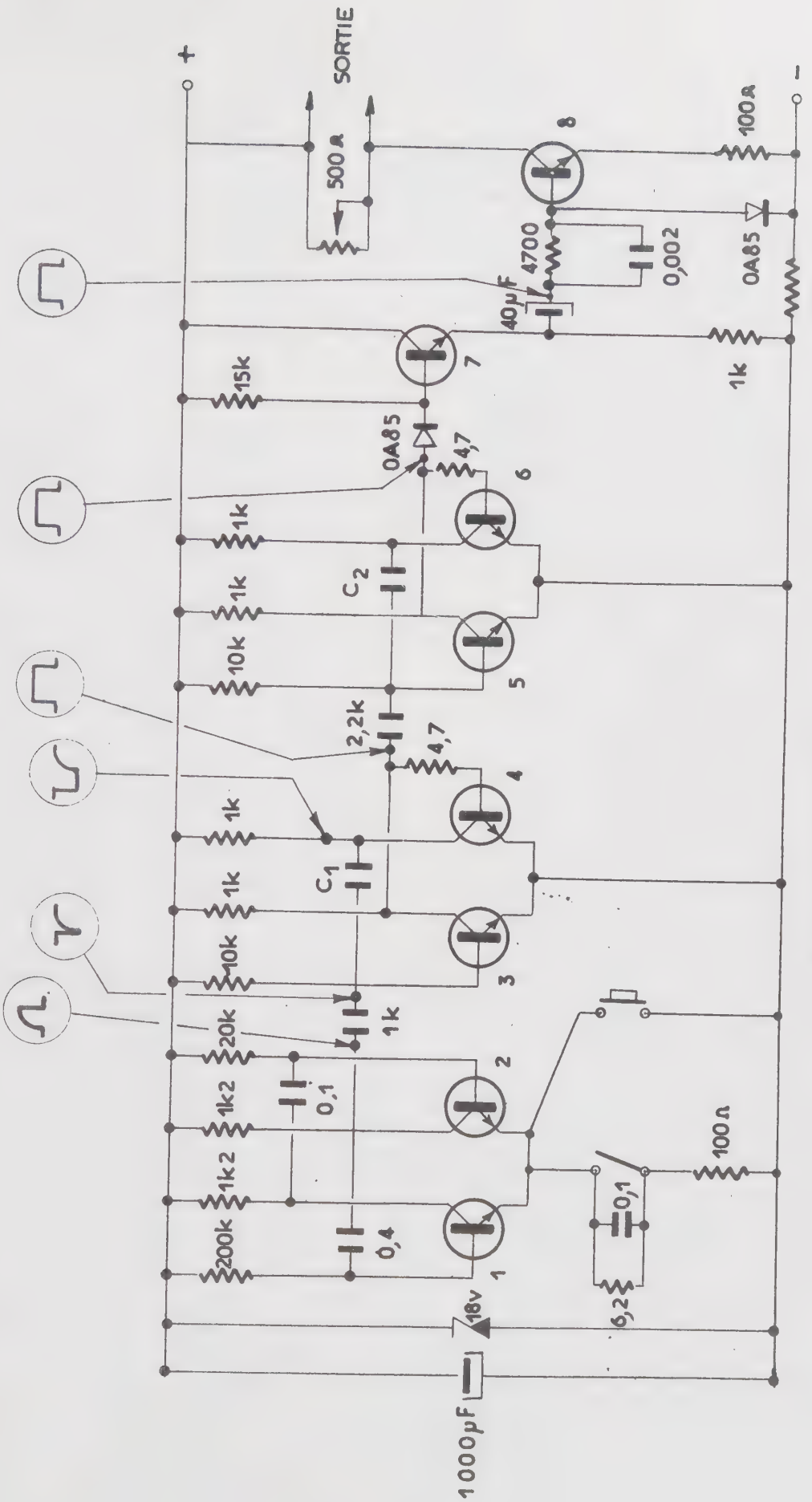
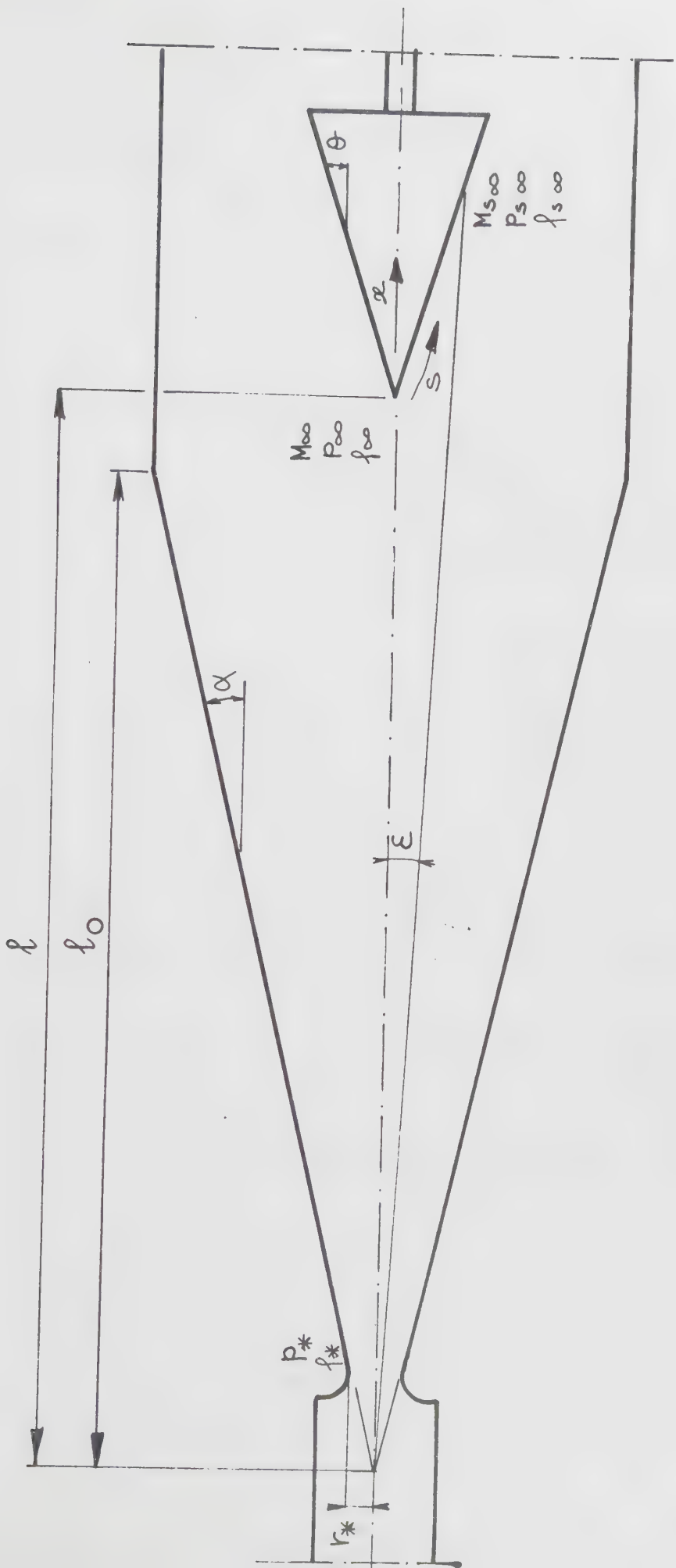


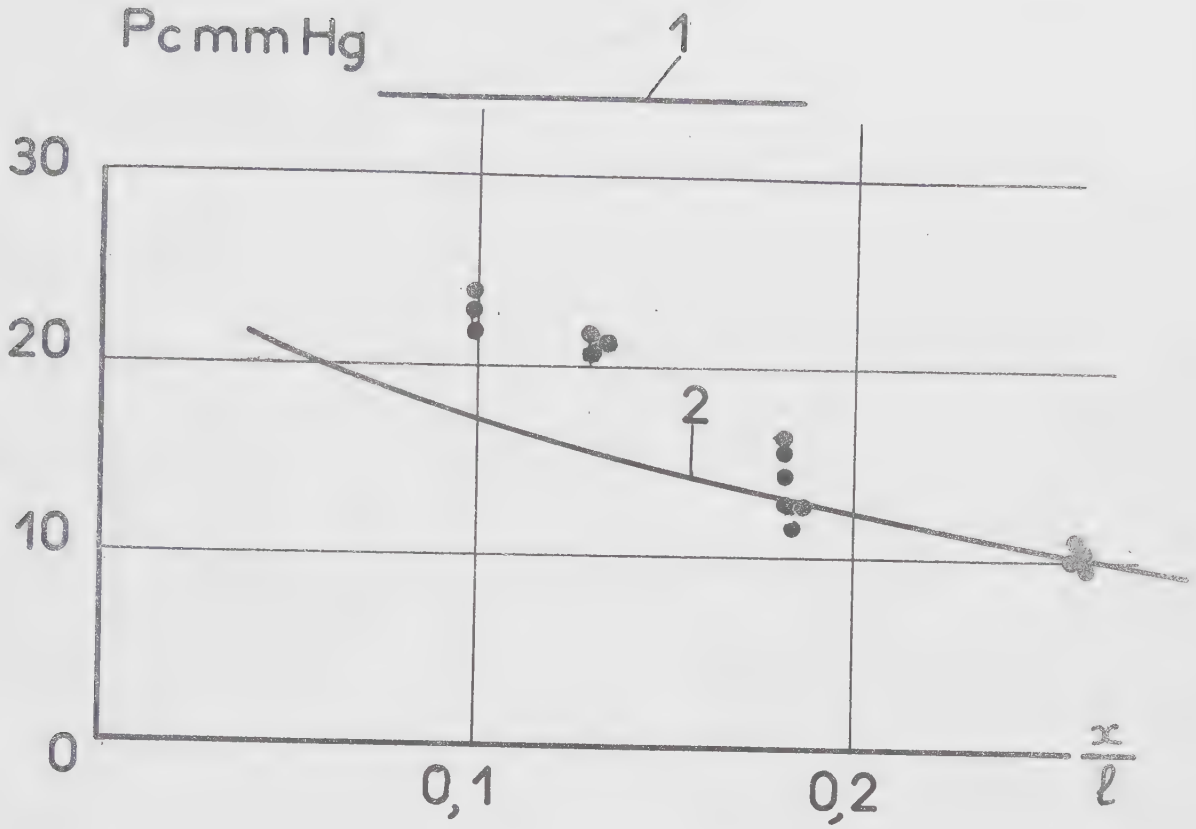
Schéma du pont



Alimentation du pont d'étalonnage de sondes thermiques

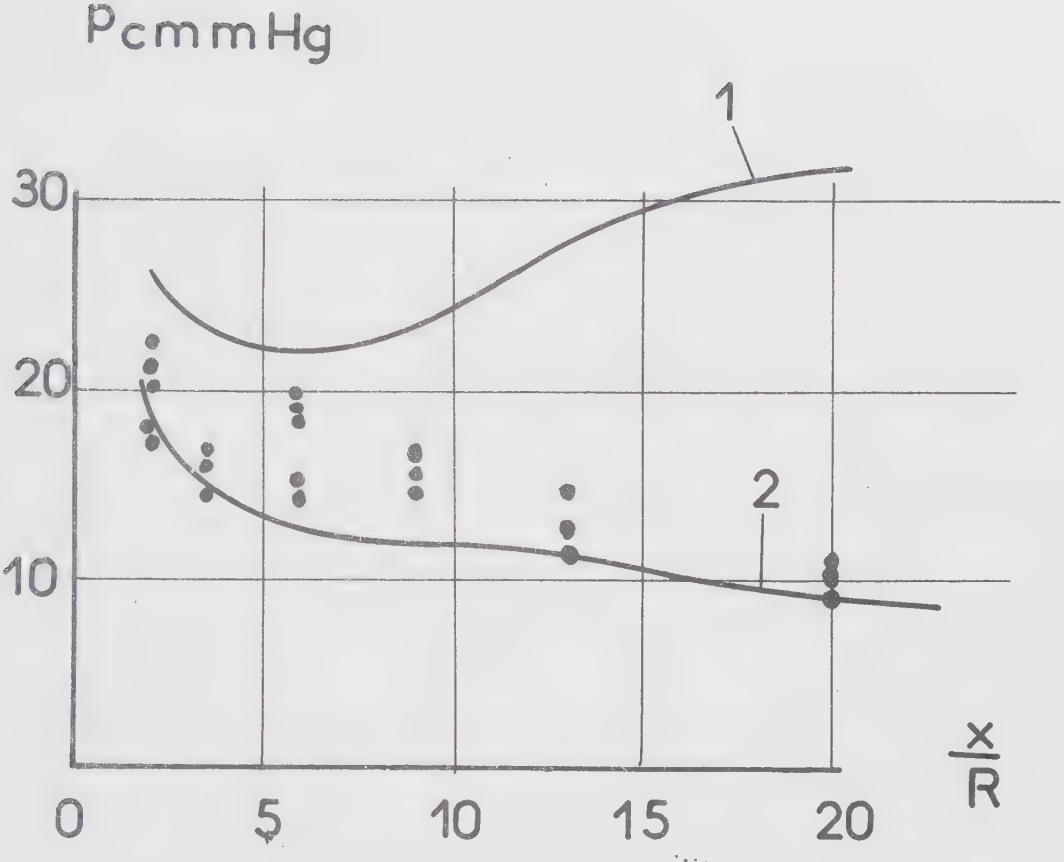

θ
$M_{s\infty}$
$P_{s\infty}$
$\rho_{s\infty}$
x
s
M_∞
P_∞
ρ_∞
α
ε
ℓ
ℓ_0
P^*
ρ^*
r^*

NOTATIONS



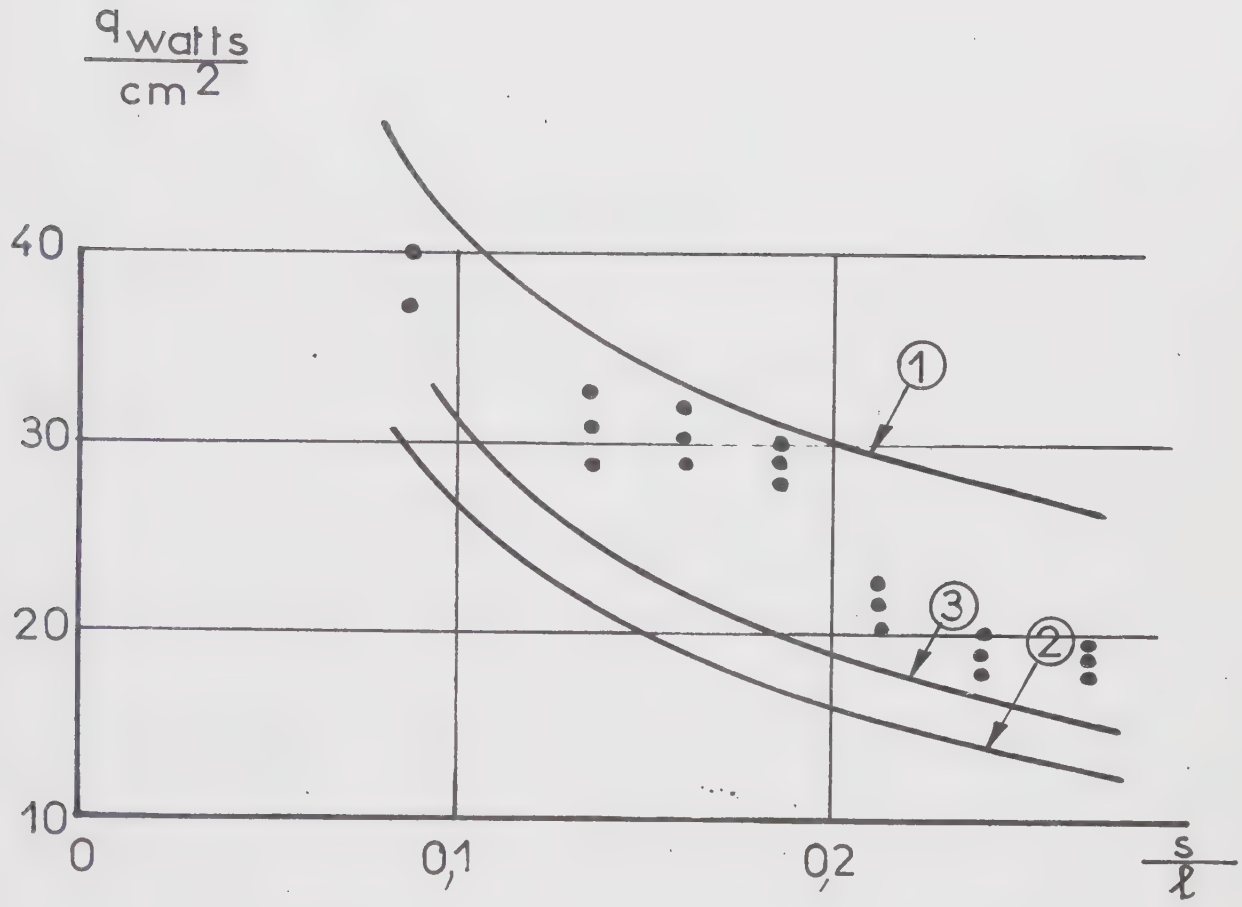
Distribution de pression sur un cône à pointe vive. $\theta = 15°$; $\ell = 63,5$ cm ; $\ell_0 = 56,25$ cm

1 Cas de l'écoulement uniforme.
2 Cas de l'écoulement sphérique.
• Points expérimentaux



Distribution de la pression sur un cône émoussé $\theta = 15°$ $R = 0{,}7$cm $\ell = 65{,}5$cm $\ell_o = 56{,}25$cm

1 Cas de l'écoulement uniforme.
2 Cas de l'écoulement sphérique.
• Points expérimentaux.



Distribution du flux de chaleur sur un cône non émoussé .

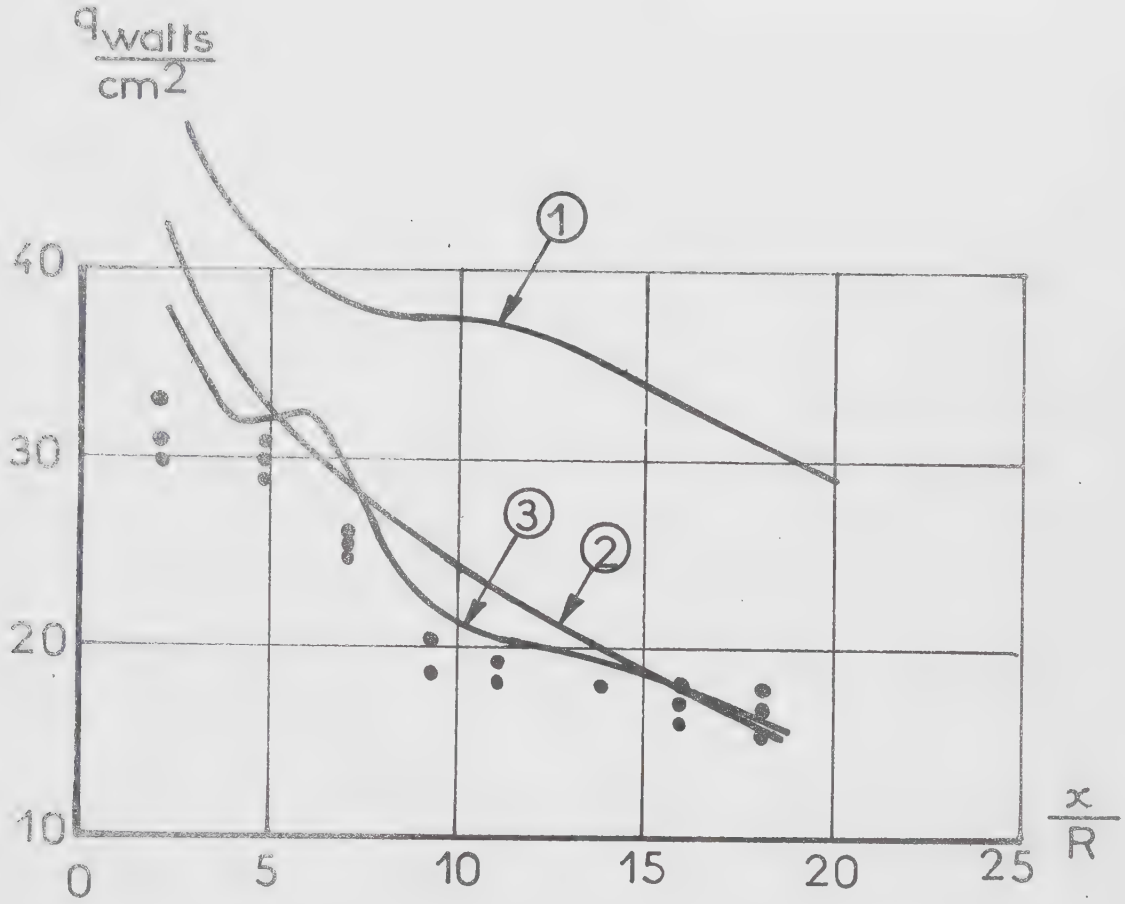
$\theta = 15°$ $\quad \ell = 63{,}5$ cm $\quad \ell_0 = 56{,}25$ cm

(1) Cas de l'écoulement uniforme.

(2) Cas de l'écoulement sphérique.

(3) Avec intéraction visqueuse.

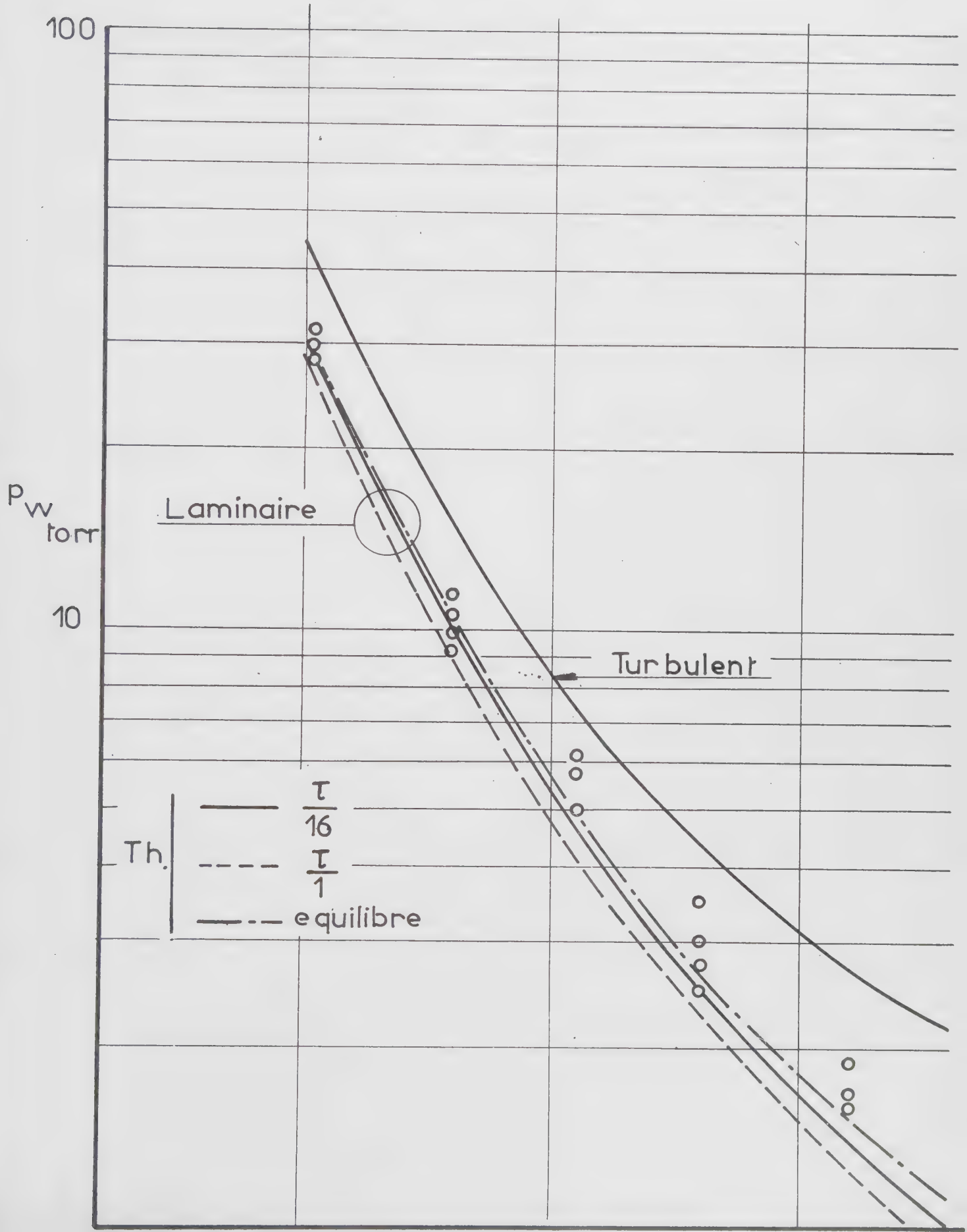
● Points expérimentaux.

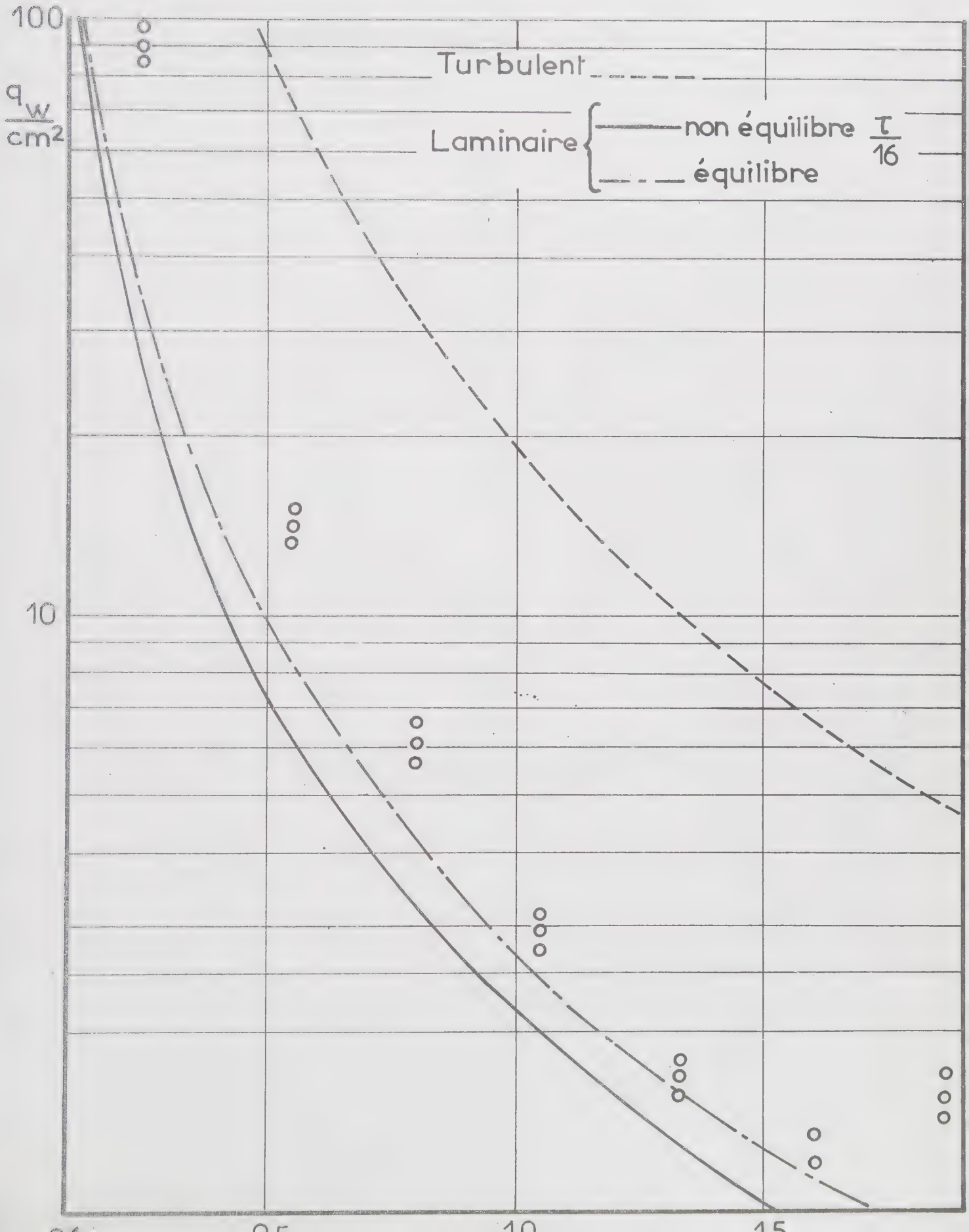


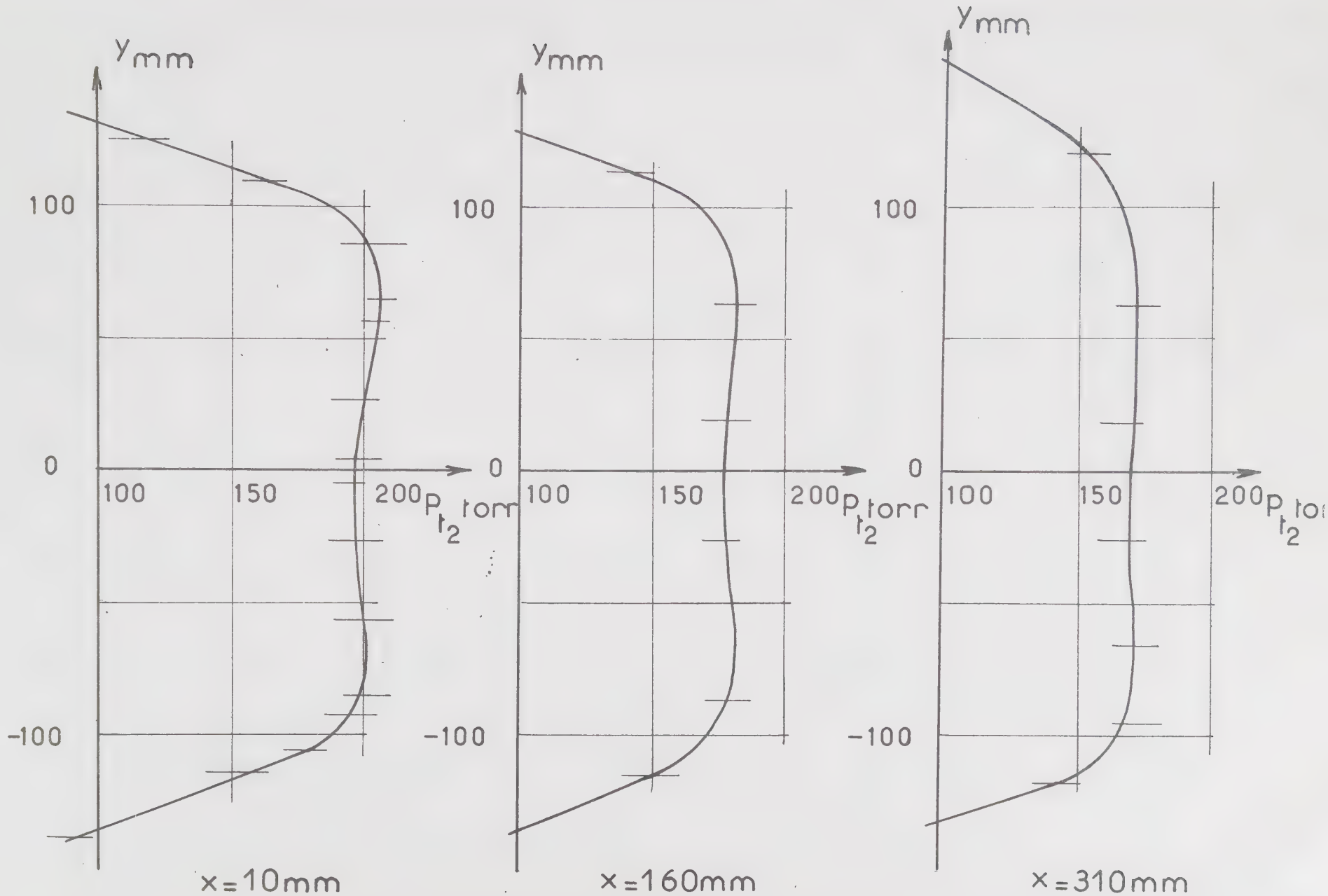
Distribution du flux de chaleur sur un cône émoussé

R = 0,7 cm θ = 15° ℓ = 65,5 cm ℓ_0 = 56,25 cm

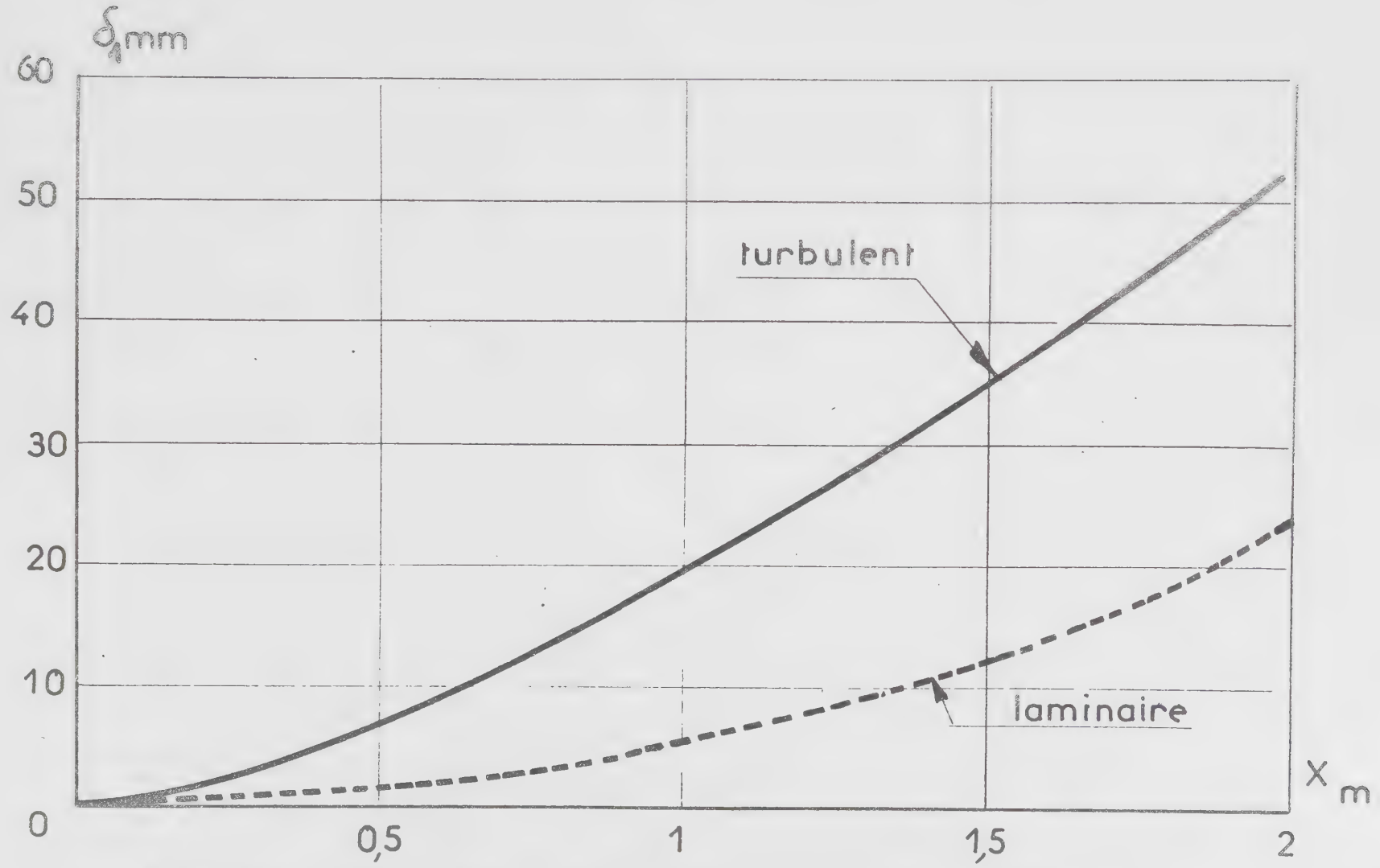
(1) Cas de l'écoulement uniforme.
(2) Cas de l'écoulement sphérique.
(3) Courbe obtenue à partir de la distribution expérimentale de la pression.
● Points expérimentaux.


100
P_w torr
10
Laminaire
Turbulent
Th.
$\frac{\tau}{16}$
$\frac{\tau}{1}$
equilibre

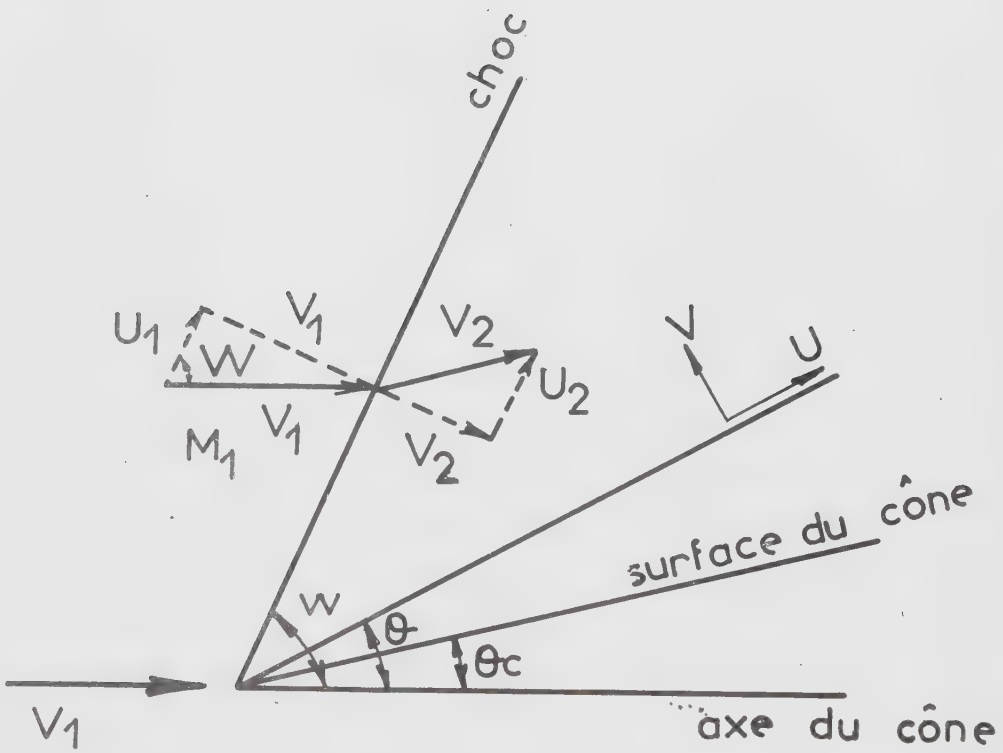

100
$\frac{q_w}{cm^2}$
10
Turbulent
Laminaire
non équilibre
équilibre
$\frac{\tau}{16}$



Répartition des pressions pitot dans la veine d'éssais



Epaisseur de déplacement de la couche limite


choc
U_1
V_1
W
V_2
U_2
M_1
V_1
V_2
V
U
surface du cône
w
θ
θ_c
V_1
axe du cône

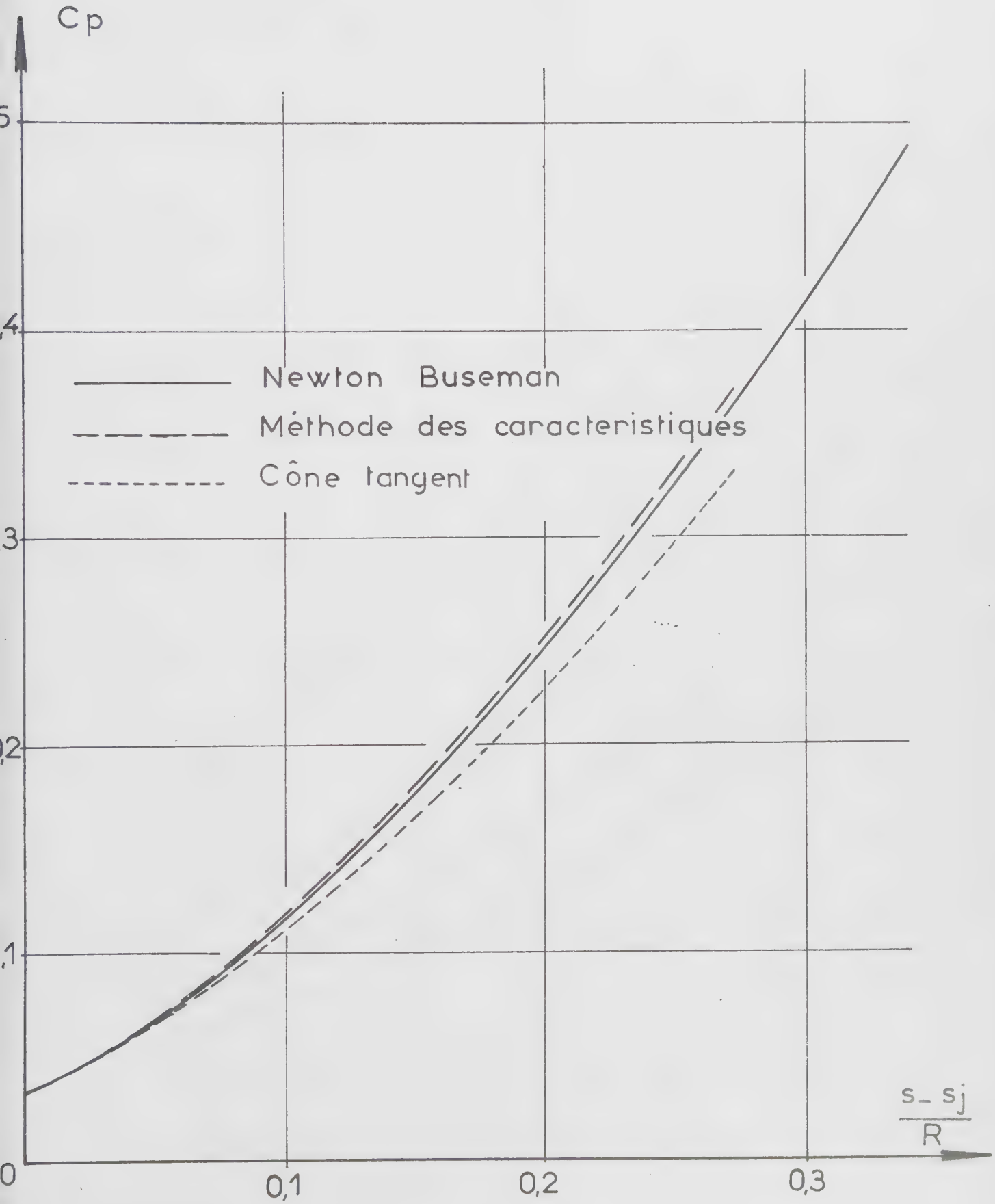
NOTATIONS

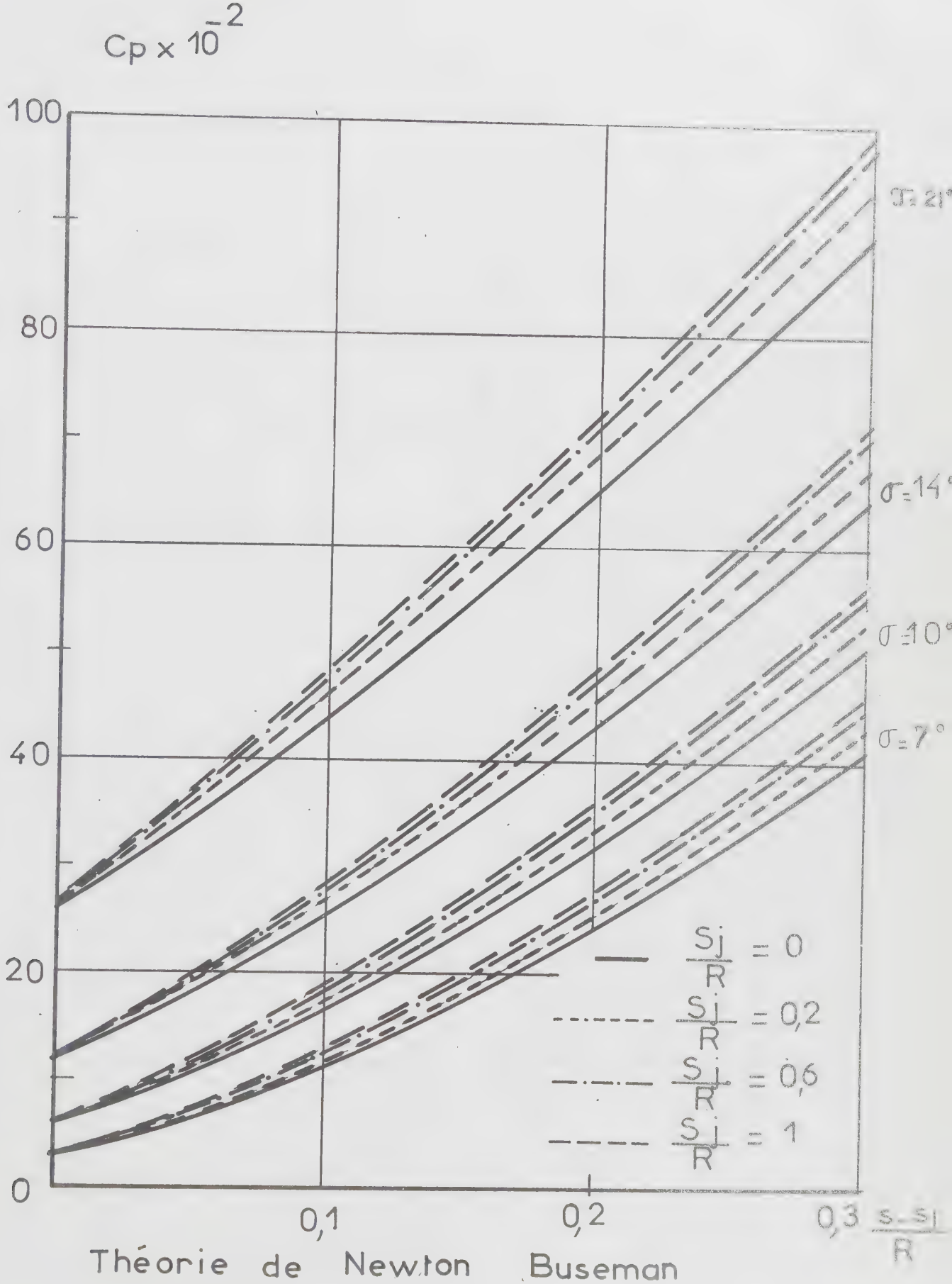
$M_\infty = 10$ $W = 0,16485$

$\Delta\theta = -0,015$ rad	$\frac{u}{C}$	$\frac{v}{C}$	$\frac{P}{P_\infty}$	$\frac{\rho}{\rho_\infty}$
1	0.96276280 00	-0.73496070-01	0.0	0.0
2	0.96289090 00	-0.70779670-01	0.0	0.0
3	0.96299510 00	-0.68089370-01	0.30612200 01	0.13600860-01
4	0.96309520 00	-0.65423790-01	0.30869850 01	0.13633470-01
5	0.96319140 00	-0.62774470-01	0.31115310 01	0.13664350-01
6	0.96328350 00	-0.60141630-01	0.31348730 01	0.13693560-01
7	0.96337180 00	-0.57517970-01	0.31571520 01	0.13721300-01
8	0.96345610 00	-0.54904630-01	0.31783590 01	0.13747570-01
9	0.96353650 00	-0.52294990-01	0.31986030 01	0.13772530-01
10	0.96361300 00	-0.49690760-01	0.32178630 01	0.13796170-01
11	0.96368560 00	-0.47085760-01	0.32362170 01	0.13818610-01
12	0.96375420 00	-0.44482020-01	0.32536400 01	0.13839820-01
13	0.96381900 00	-0.41873630-01	0.32701880 01	0.13859900-01
14	0.96387990 00	-0.39262820-01	0.32858320 01	0.13878810-01
15	0.96393680 00	-0.36643850-01	0.33006060 01	0.13896610-01
16	0.96398980 00	-0.34018990-01	0.33144830 01	0.13913280-01
17	0.96403890 00	-0.31382640-01	0.33274740 01	0.13928840-01
18	0.96408390 00	-0.28737050-01	0.33395550 01	0.13943270-01
19	0.96412510 00	-0.26076630-01	0.33507170 01	0.13956570-01
20	0.96416220 00	-0.23403560-01	0.33609370 01	0.13968730-01
21	0.96419530 00	-0.20712250-01	0.33701860 01	0.13979690-01
22	0.96422430 00	-0.18004700-01	0.33784410 01	0.13989460-01
23	0.96424930 00	-0.15275240-01	0.33856520 01	0.13997990-01
24	0.96427010 00	-0.12525670-01	0.33917080 01	0.14005240-01
25	0.96428690 00	-0.97501630-02	0.33968060 01	0.14011150-01
26	0.96429940 00	-0.69501990-02	0.34006520 01	0.14015660-01
27	0.96430770 00	-0.41197410-02	0.34032390 01	0.14018730-01
28	0.96431170 00	-0.12998480-02	0.34045390 01	0.14020260-01
29	0.96431210 00	-0.0	0.34046750 01	0.14020420-01

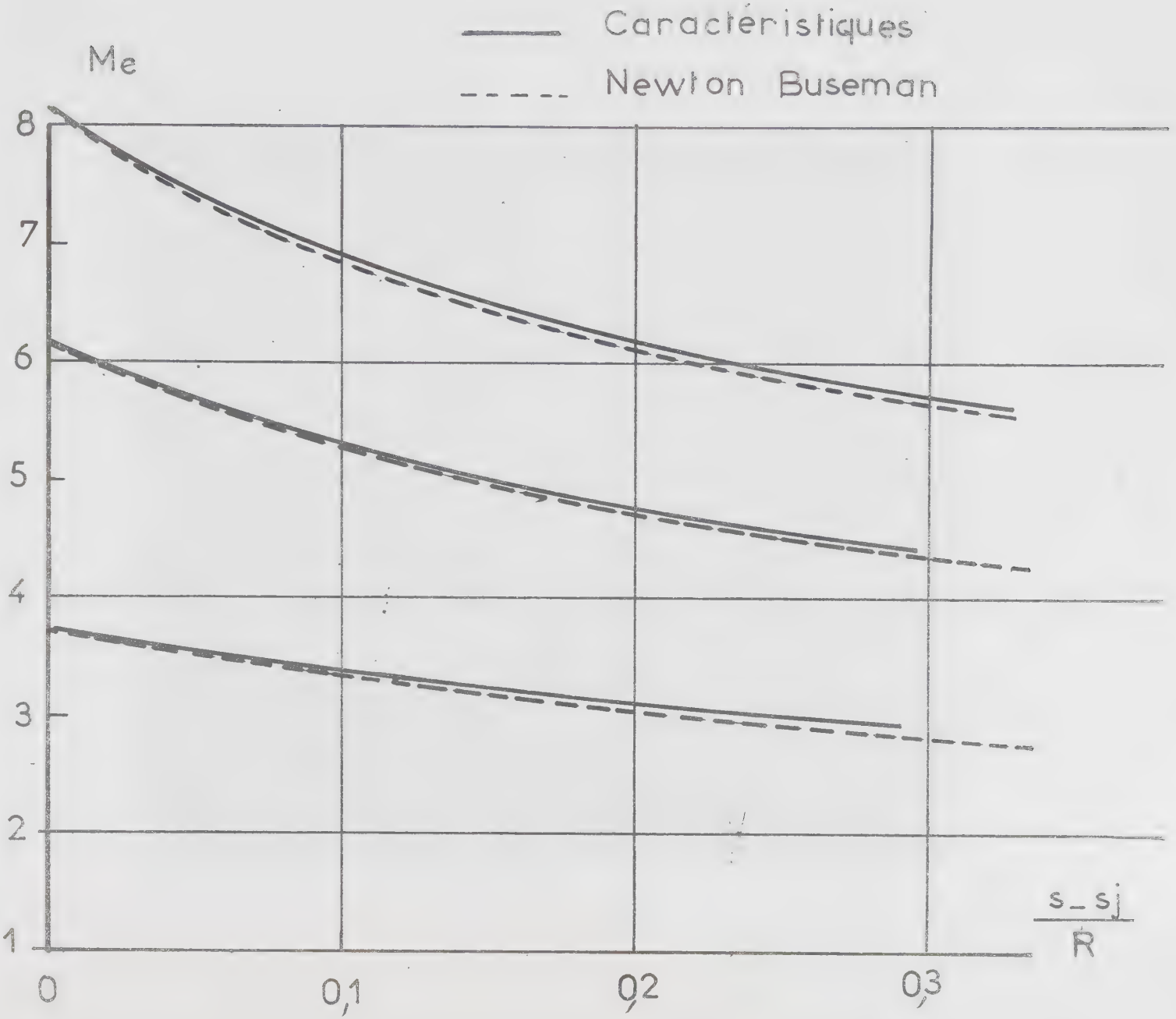
Angle en degrés : 7,0011 °

$\frac{u}{C} = 0.96431210\ 00$ $\frac{P}{P_\infty} = 0.34046750\ 01$ $\frac{\rho}{\rho_\infty} = 0.14020420$


Cp
Newton Buseman
Méthode des caracteristiques
Cône tangent
s - sj / R
0,1
0,2
0,3



Théorie de Newton Buseman

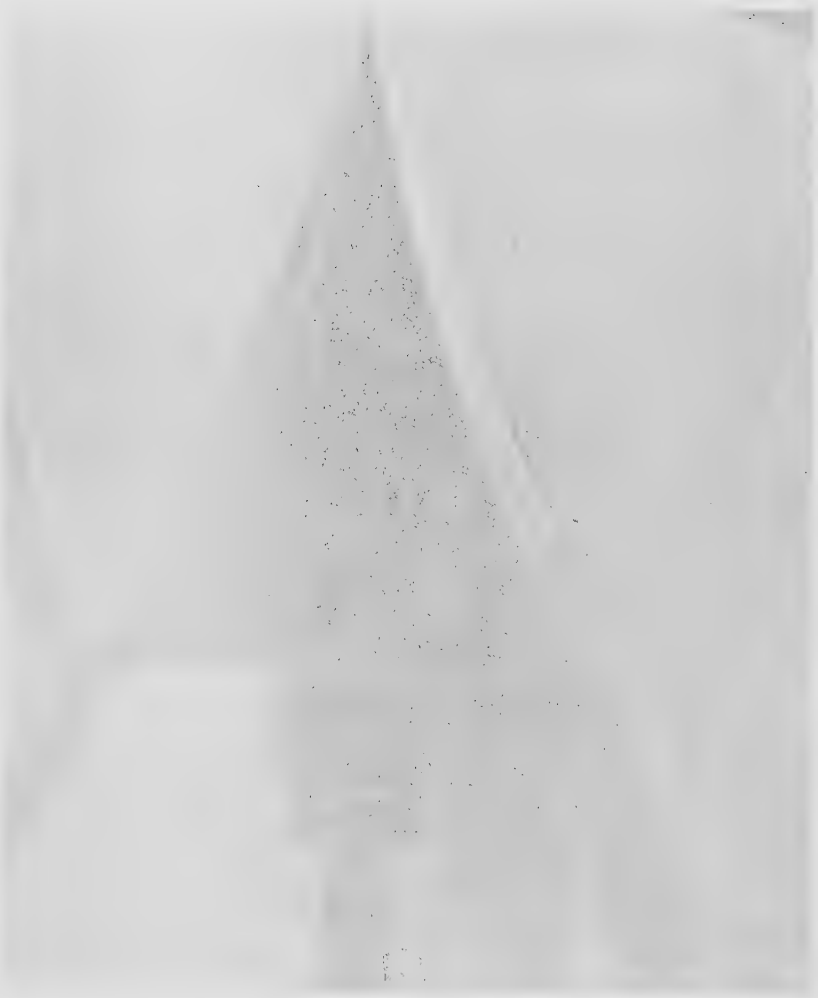

Caractéristiques
Newton Buseman
Me
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0,1
0,2
0,3
s_sj
R

$S_j / R = 0$ $R = 70$ mm

$M_{oo} = 4$ $P_{ooO} = 5$ bars $T_{ooO} = 400^{o}$ K

$S_{j/R} = 0$ $R = 300$ mm

$M_{oo} = 4$ $P_{ooO} = 5$ bars $T_{ooO} = 400^{o}$ K

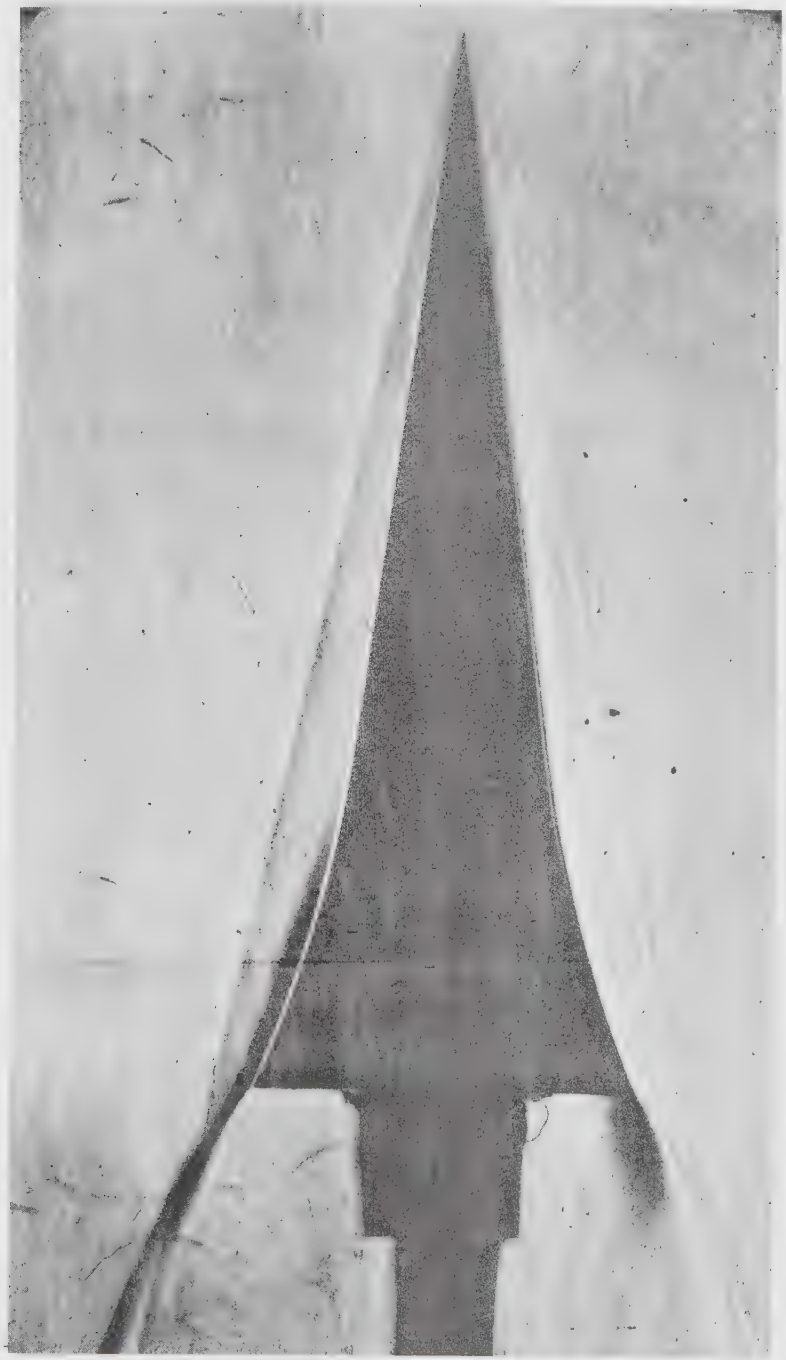


$S_j / R = 0,1$ $R = 300$ mm

$M_{oo} = 4$ $P_{ooO} = 5$ bars $T_{ooO} = 600^{o}$ K

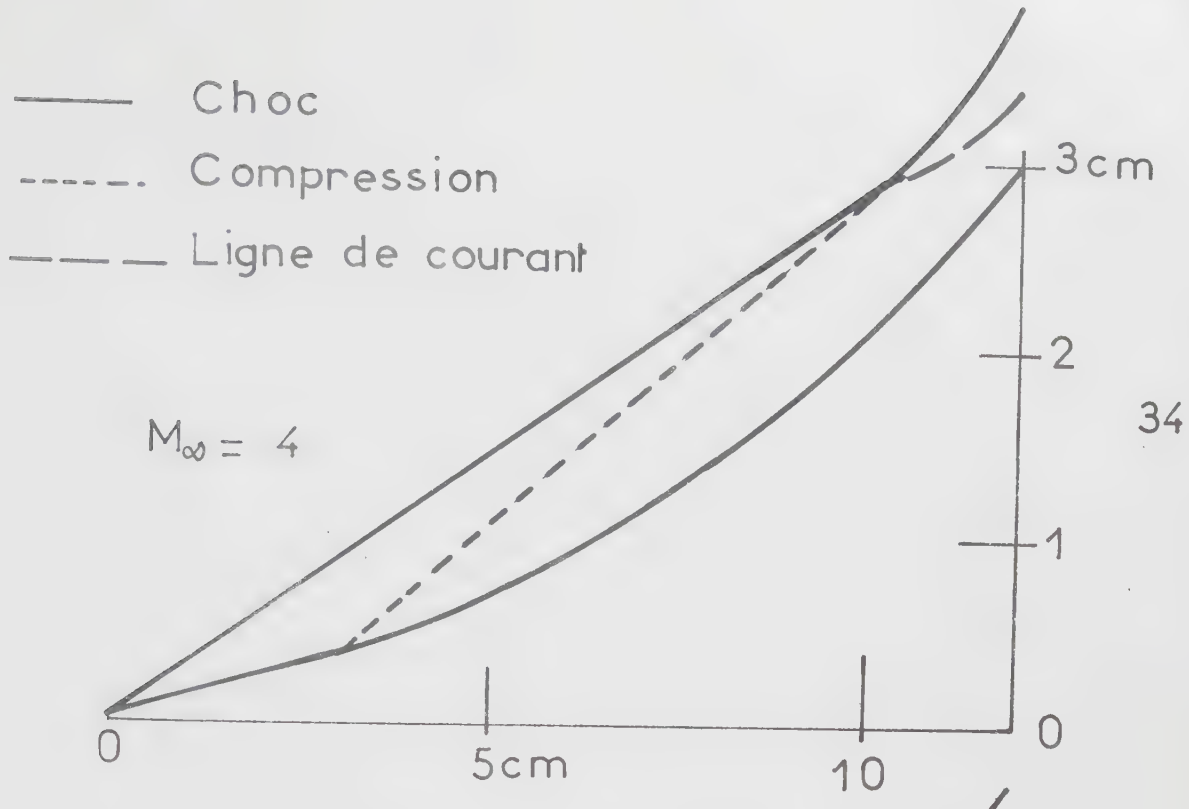
$S_j / R = 0,1$ $R = 300$ mm

$M_{oo} = 7$ $P_{ooO} = 25$ bars $T_{ooO} = 600^{o}$ K

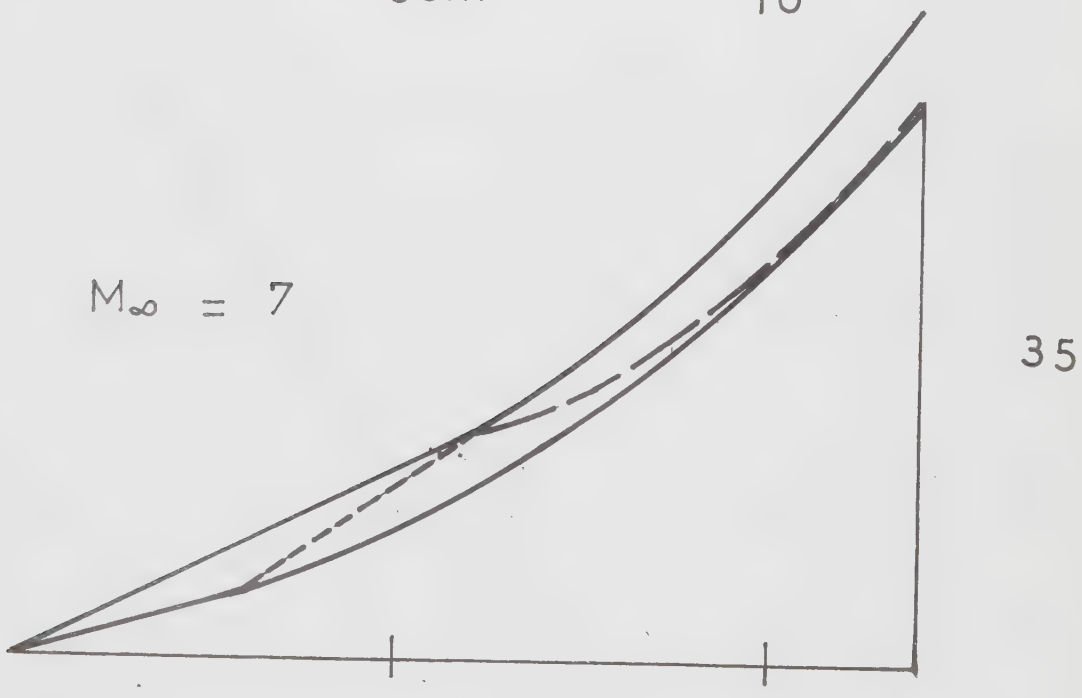


$S_j / R = 0{,}58$ $R = 300\ mm$

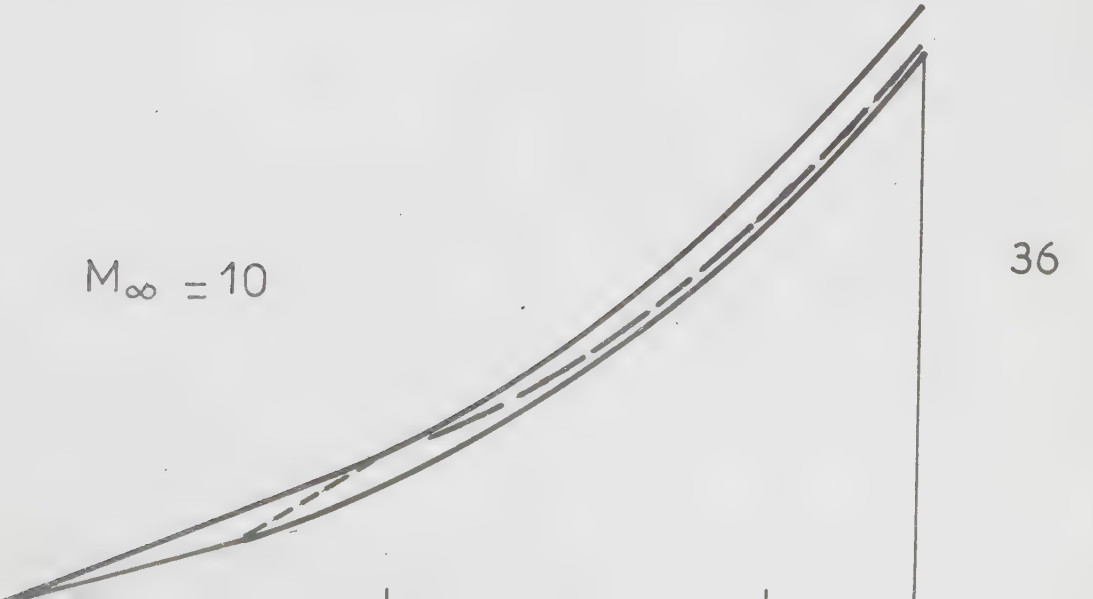
$M_{oo} = 7$ $P_{ooO} = 25\ bars$ $T_{ooO} = 600^{o}\ K$


Choc
Compression
Ligne de courant
3cm
2
1
0
$M_\infty = 4$
0
5cm
10

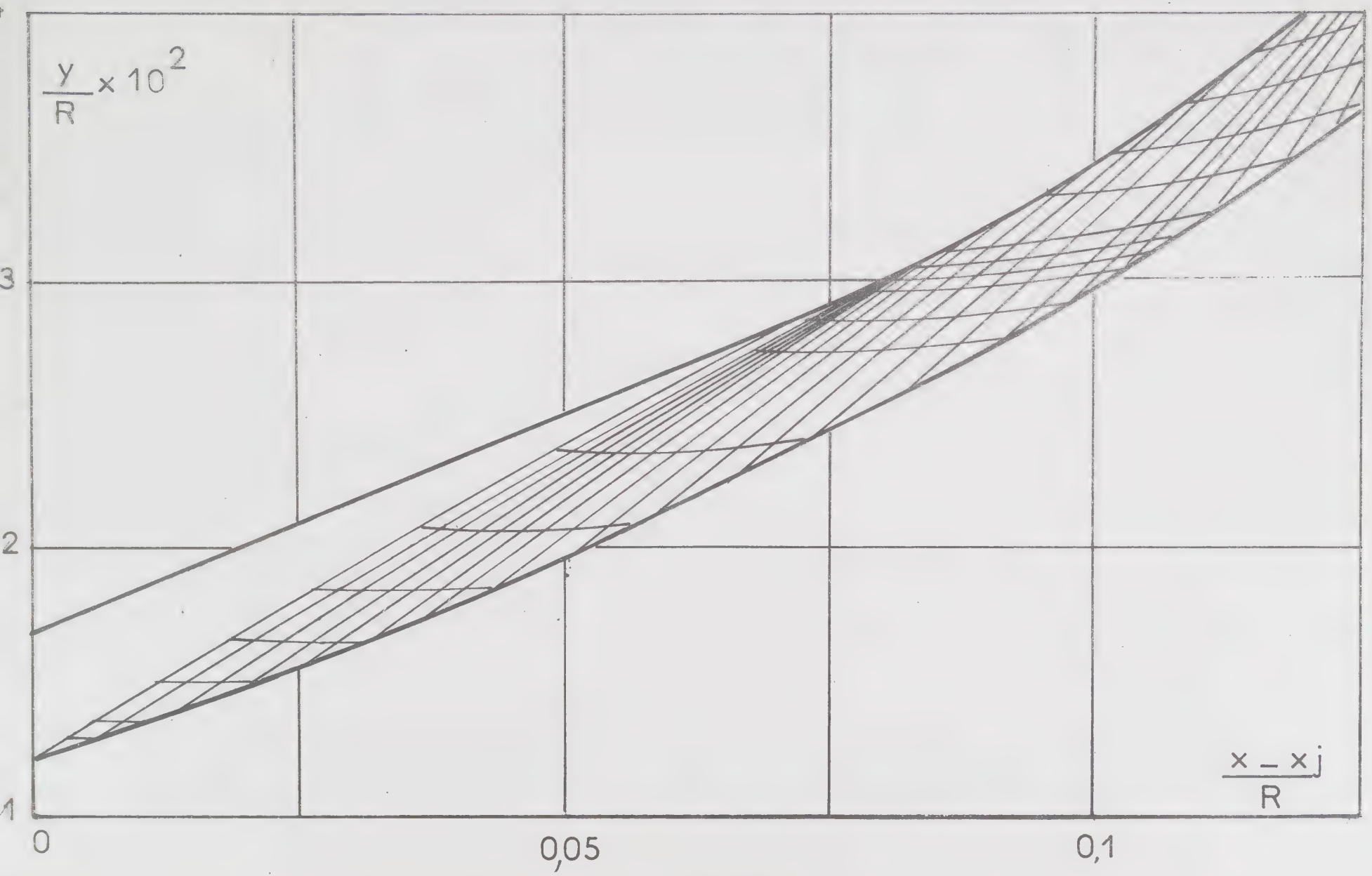
34


$M_\infty = 7$

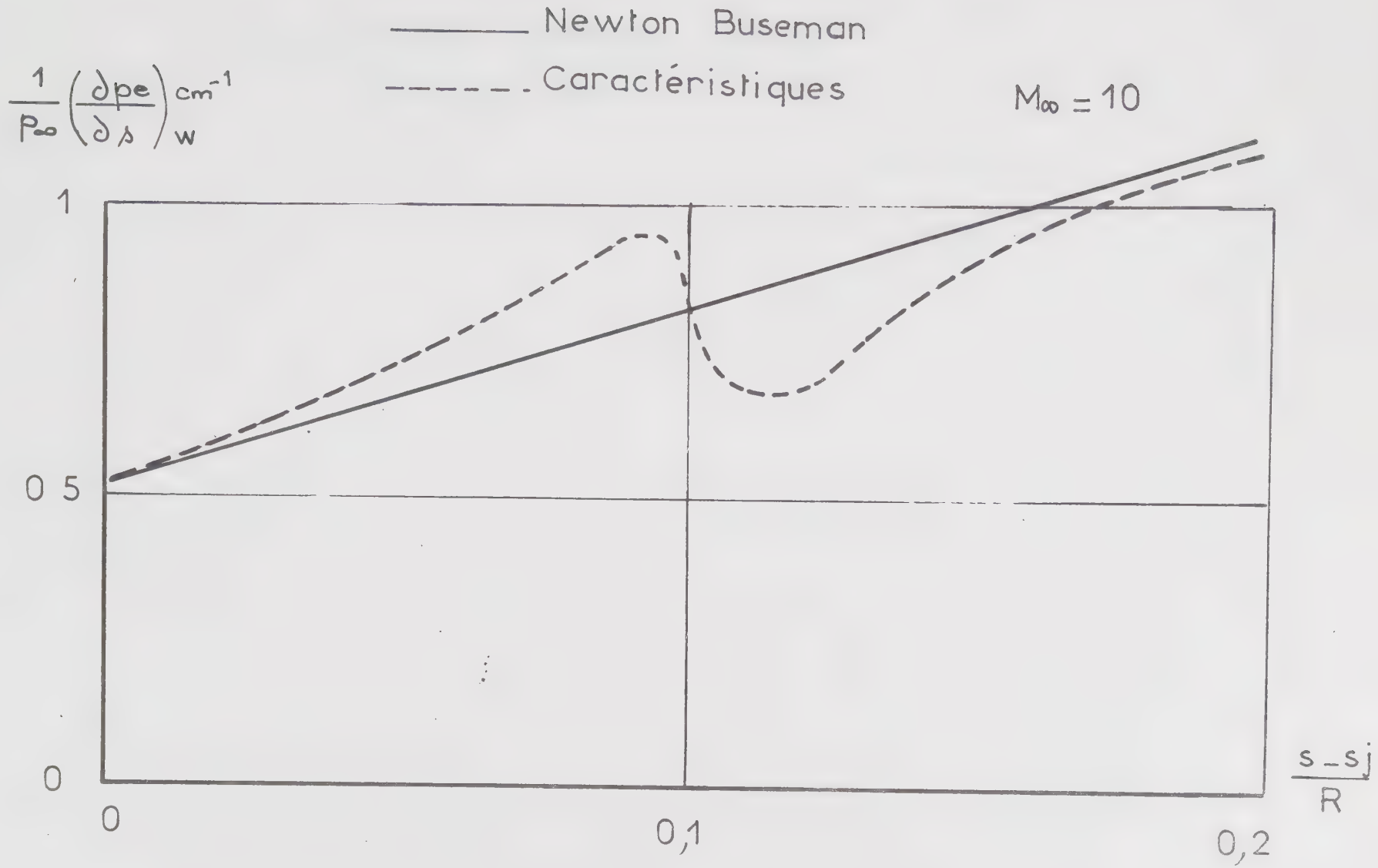
35

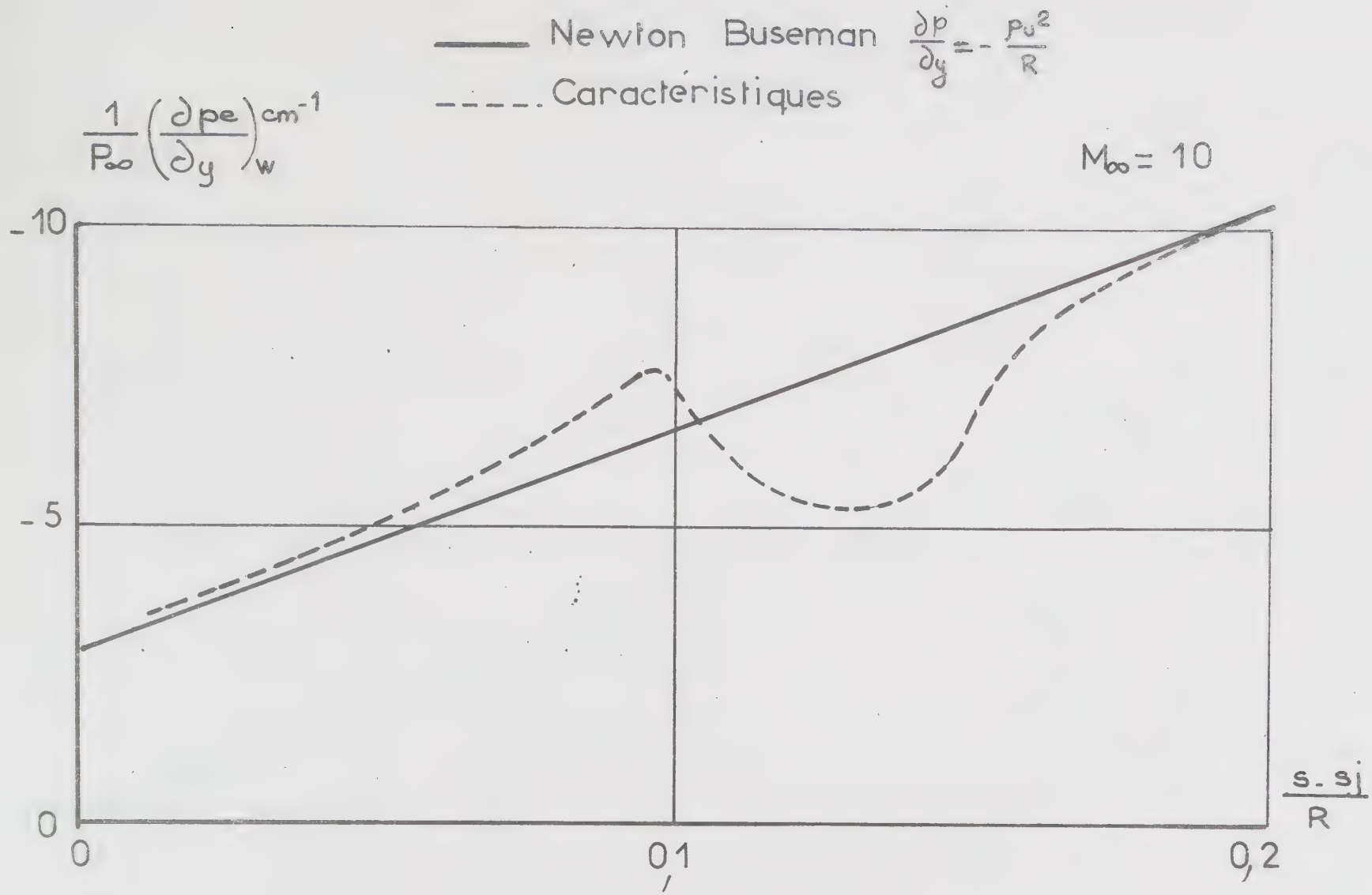

$M_\infty = 10$

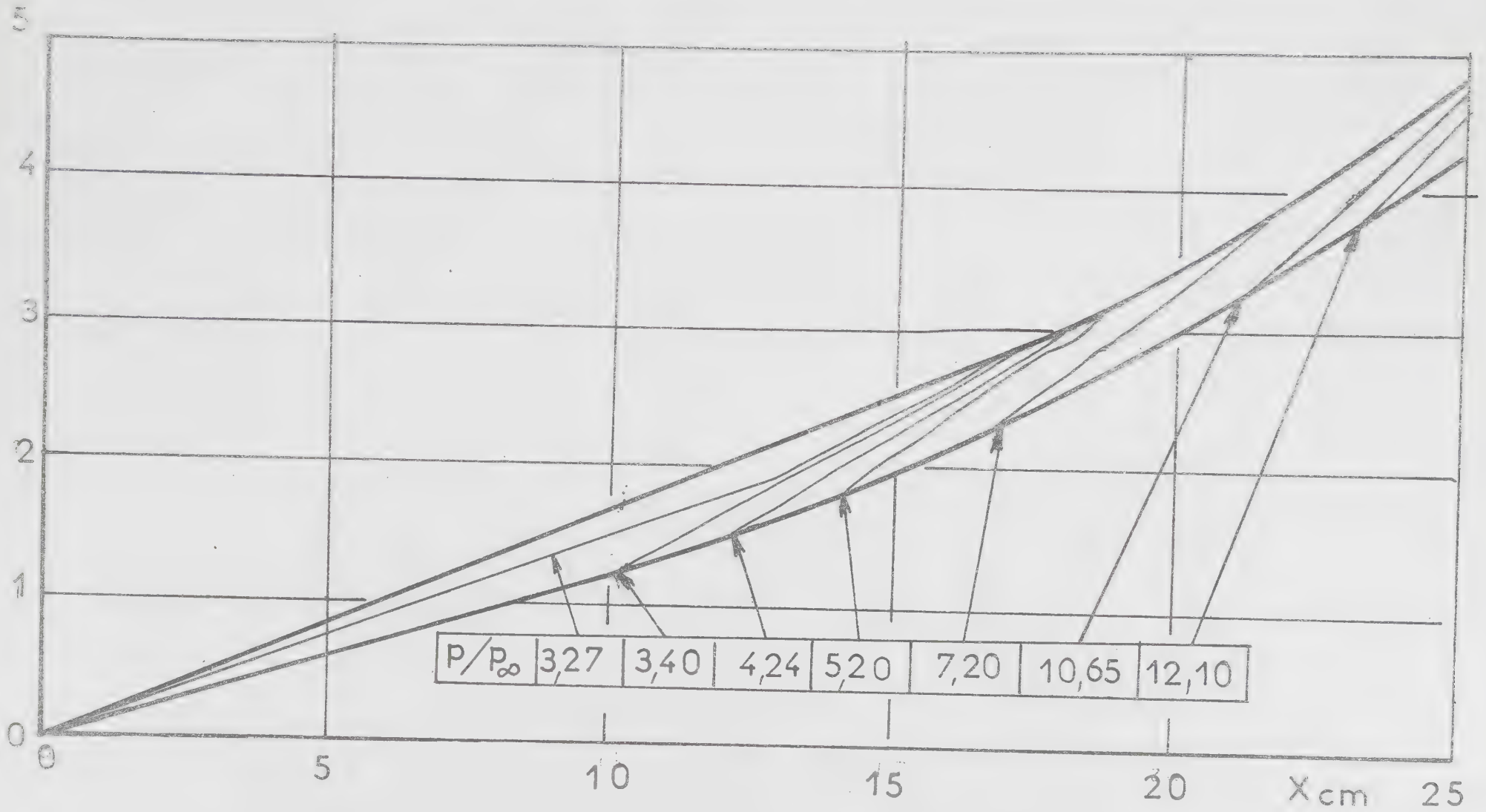
36



Reseau des caractéristiques $M_\infty = 10$

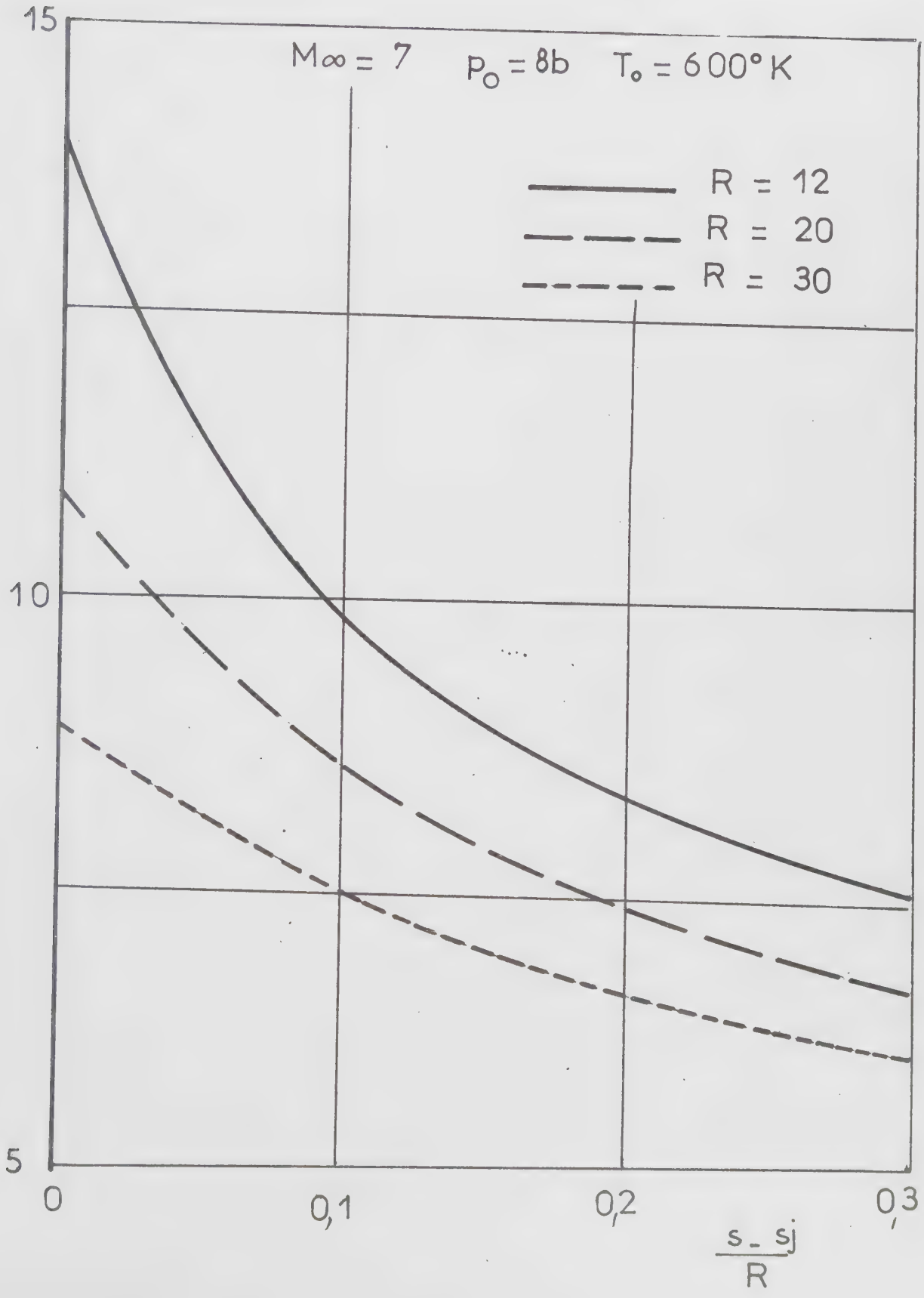

Newton Buseman
Caractéristiques
$\frac{1}{P_\infty}\left(\frac{\partial p_e}{\partial s}\right)_w$ cm^{-1}
$M_\infty = 10$
1
0 5
0
0
0,1
0,2
$\frac{s - s_j}{R}$

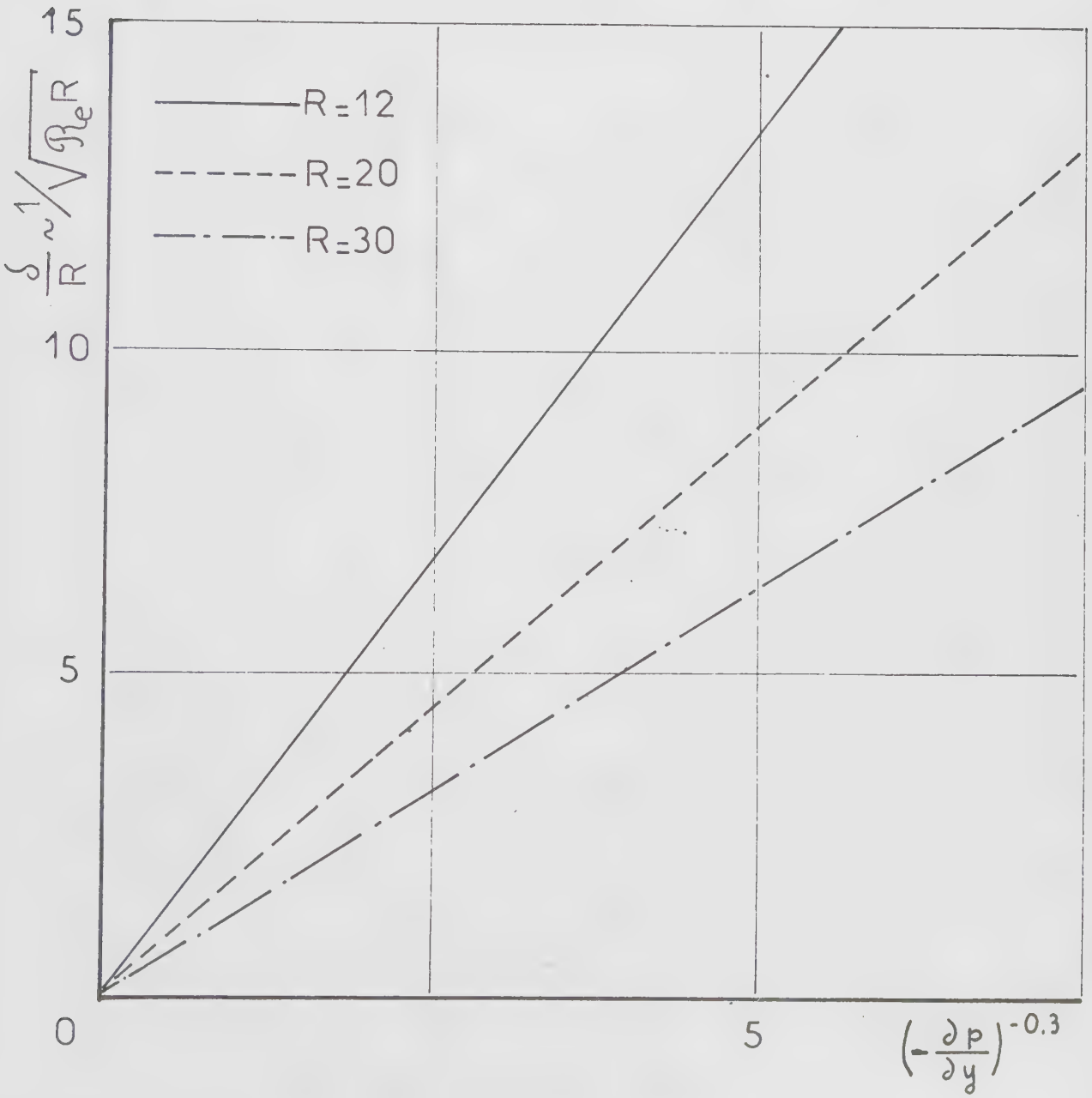

Newton Buseman $\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\rho v^2}{R}$
Caractéristiques
$\frac{1}{P_\infty}\left(\frac{\partial pe}{\partial y}\right)_w$ cm^{-1}
$M_\infty = 10$
-10
-5
0
0
0,1
0,2
$\frac{s.s_j}{R}$

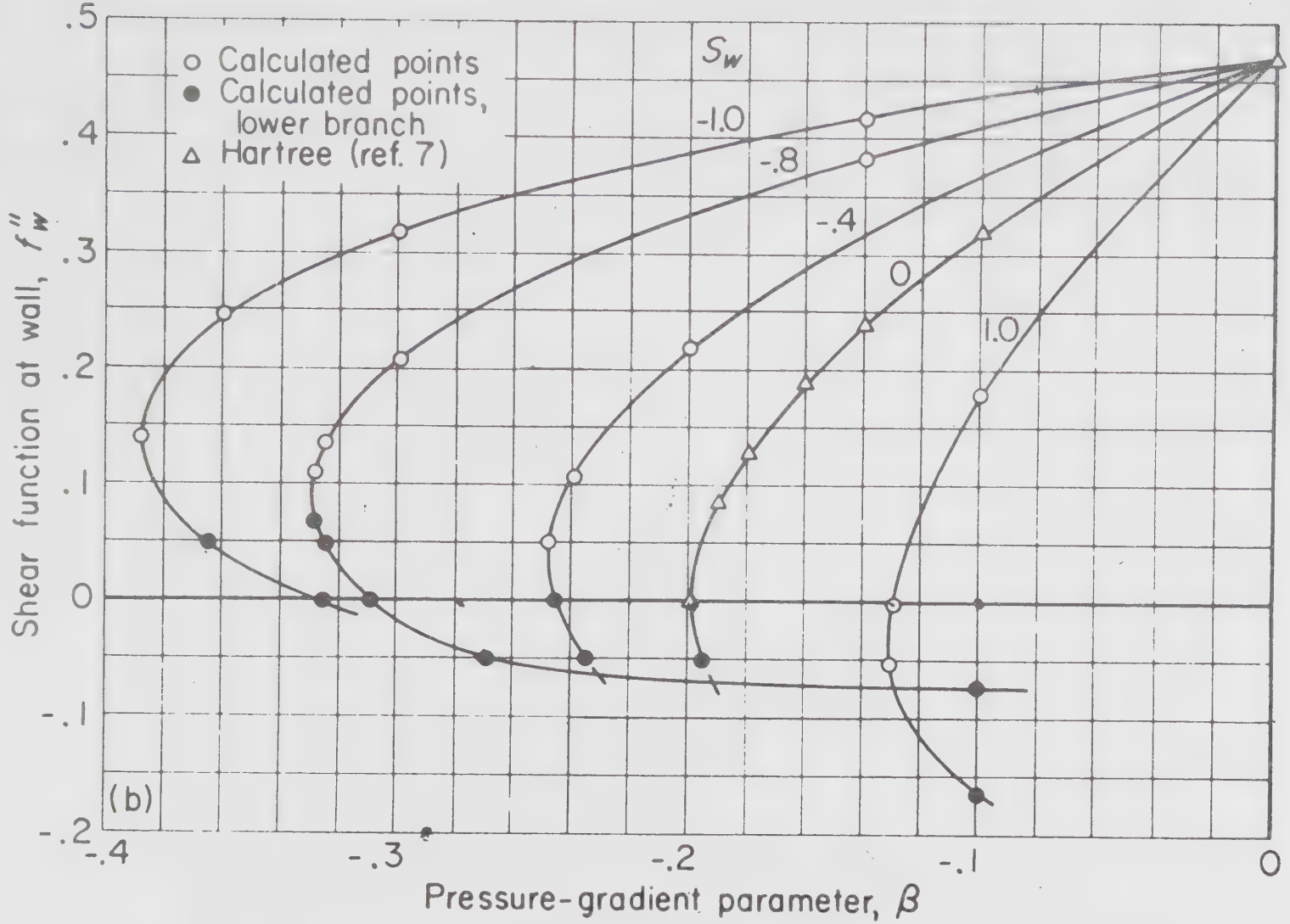


Isobares $M_\infty = 10$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{Re\ R_o}} \sim \frac{\delta}{R_o}\right) 10^4$$




15
10
5
0
5
$\frac{\delta}{R} \sim 1/\sqrt{\mathcal{R}_e R}$
R=12
R=20
R=30
$\left(-\frac{\partial p}{\partial y}\right)^{-0.3}$



(b) Adverse-pressure-gradient region.

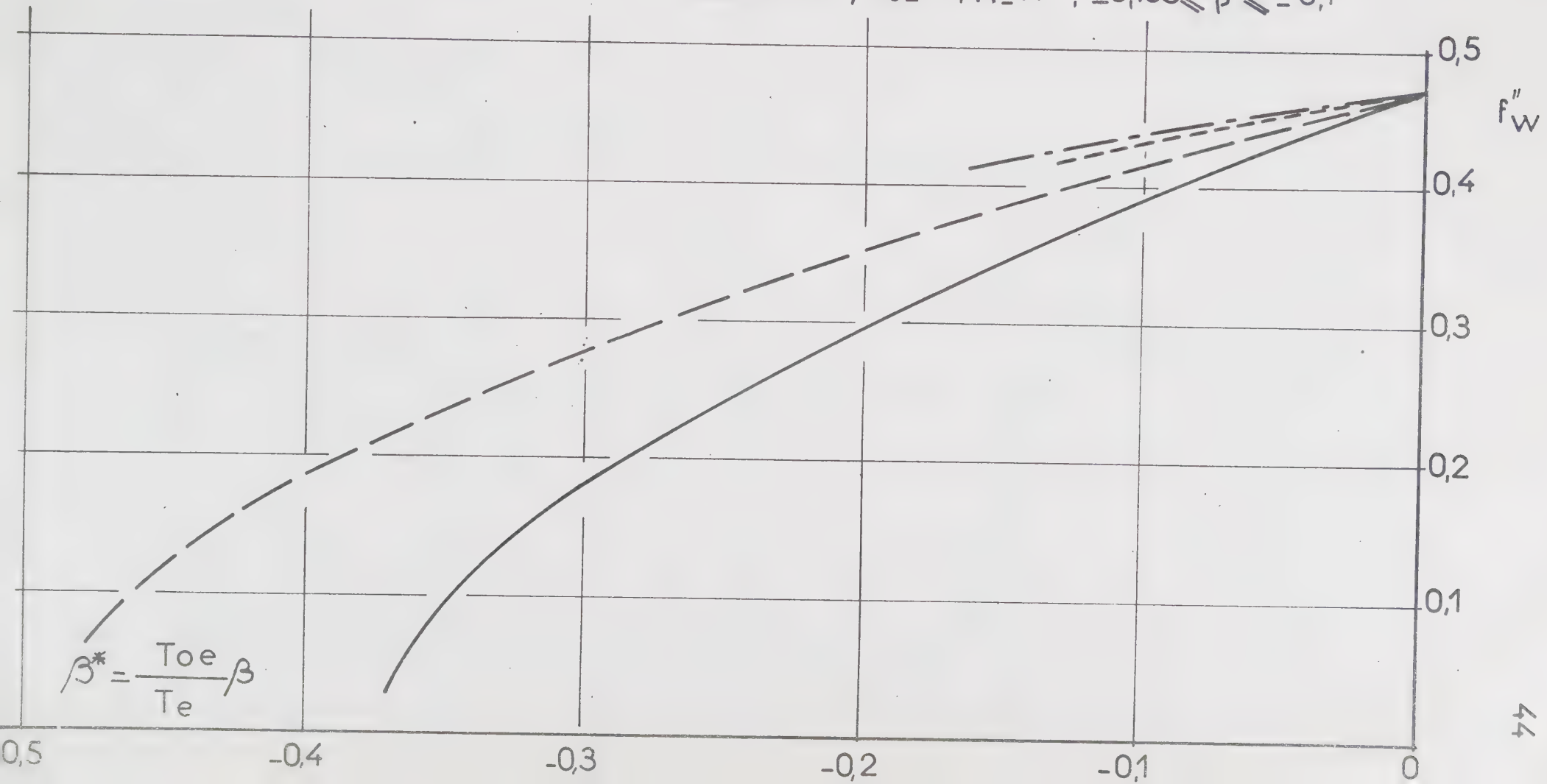
FIG. 4. Effect of pressure gradient on wall shear.

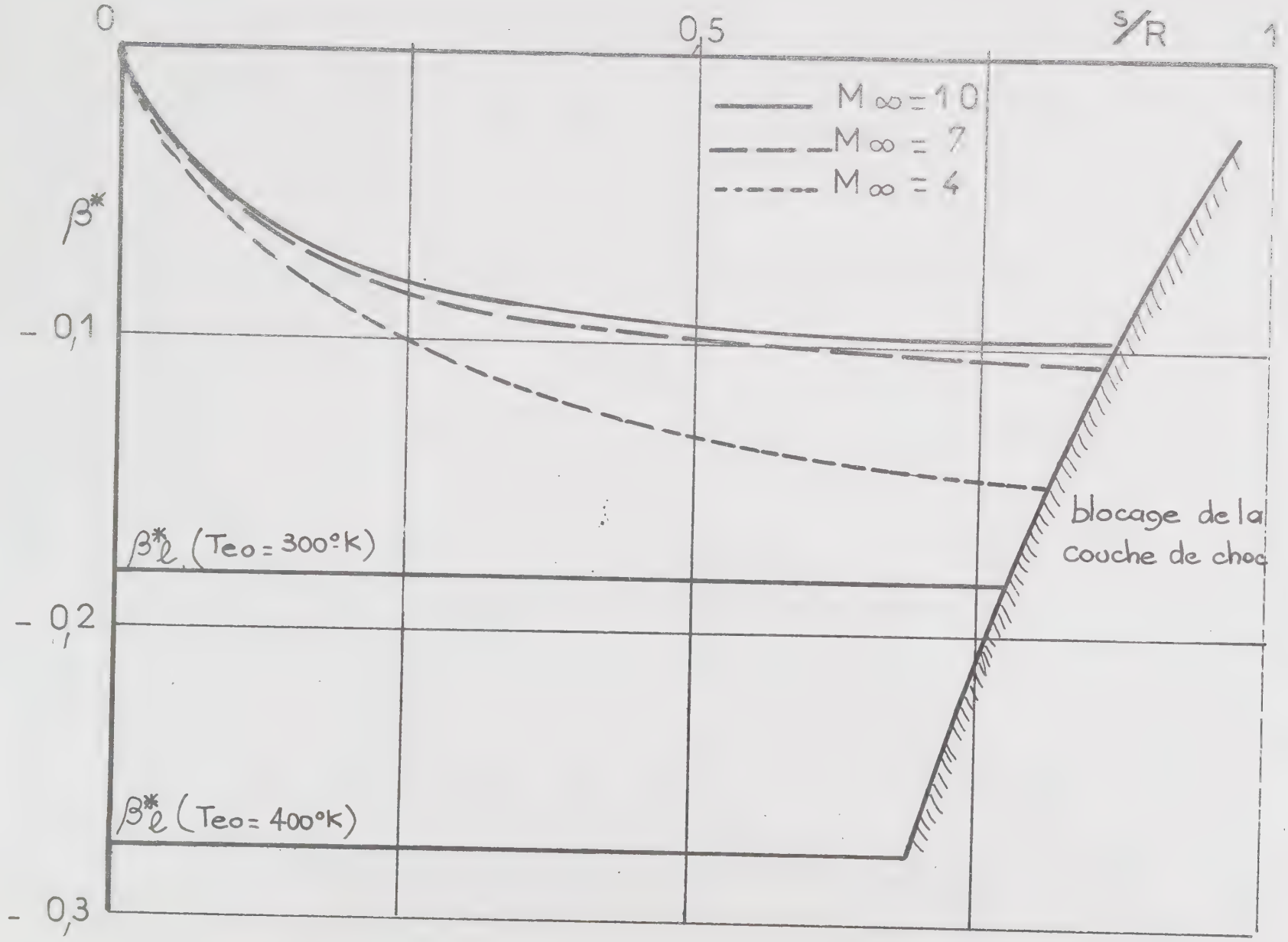
$M_\infty = 10$ { $T_{oe} = 4000°K$, $T_{ej} = 280°K$ — · — · —
$T_{oe} = 1000°K$; $T_{ej} = 70°K$ — — —

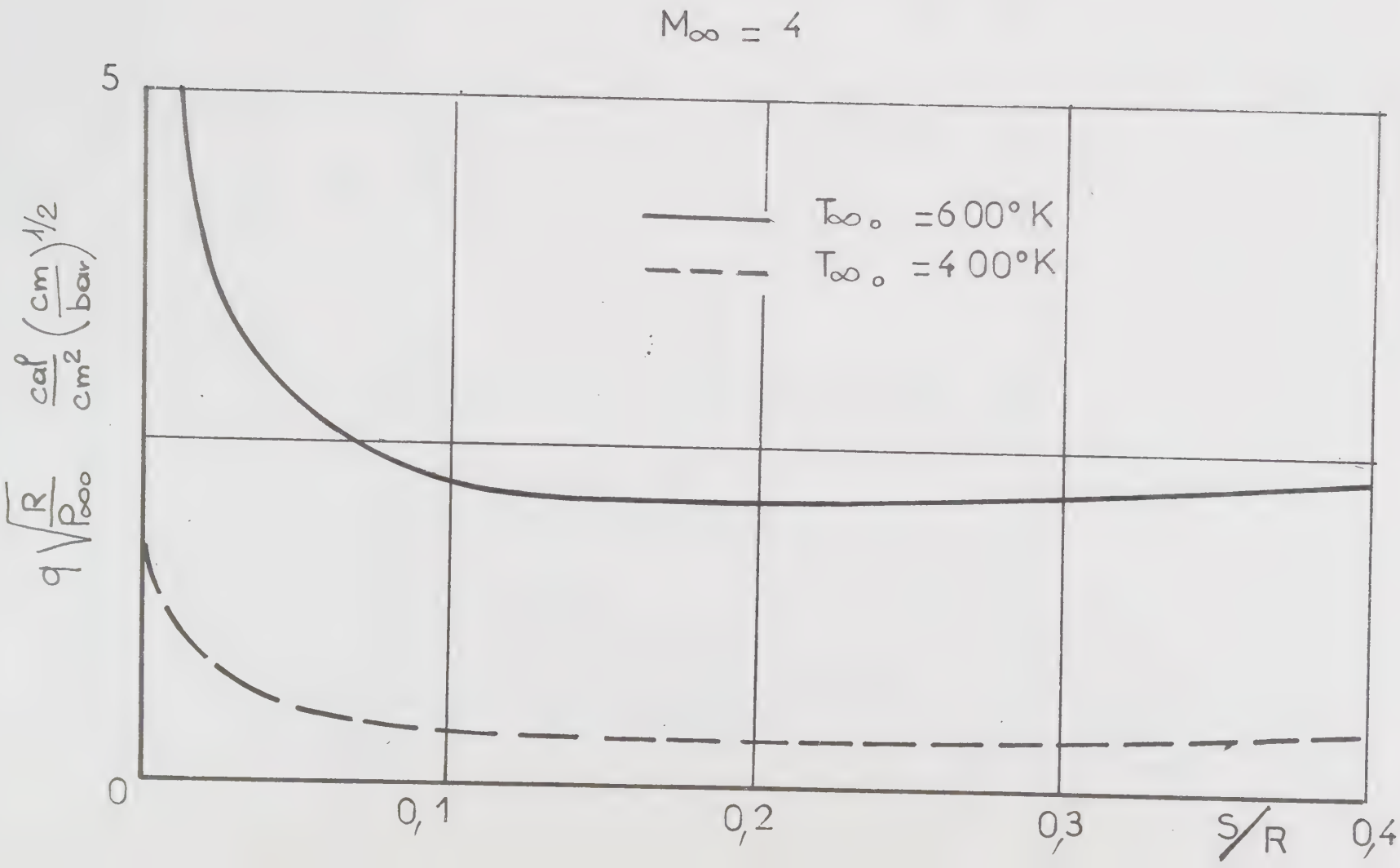
$M_\infty = 7$ { $T_{oe} = 2400°K$, $T_{ej} = 280°K$ - - - - - - - -
$T_{oe} = 600°K$, $T_{ej} = 70°K$ ————

$T_{oe} = 600°K$ {
$s_o = 3$, $R = 12$, $-0,3 \leqslant \beta^* \leqslant -0,1$
$s_o = 3$, $R = 20$, $-0,185 \leqslant \beta^* \leqslant -0,1$
$s_o = 3$, $R = 30$, $-0,126 \leqslant \beta^* \leqslant -0,1$
$s_o = 11$, $R = 19,2$, $-0,75 \leqslant \beta^* \leqslant -0,155$

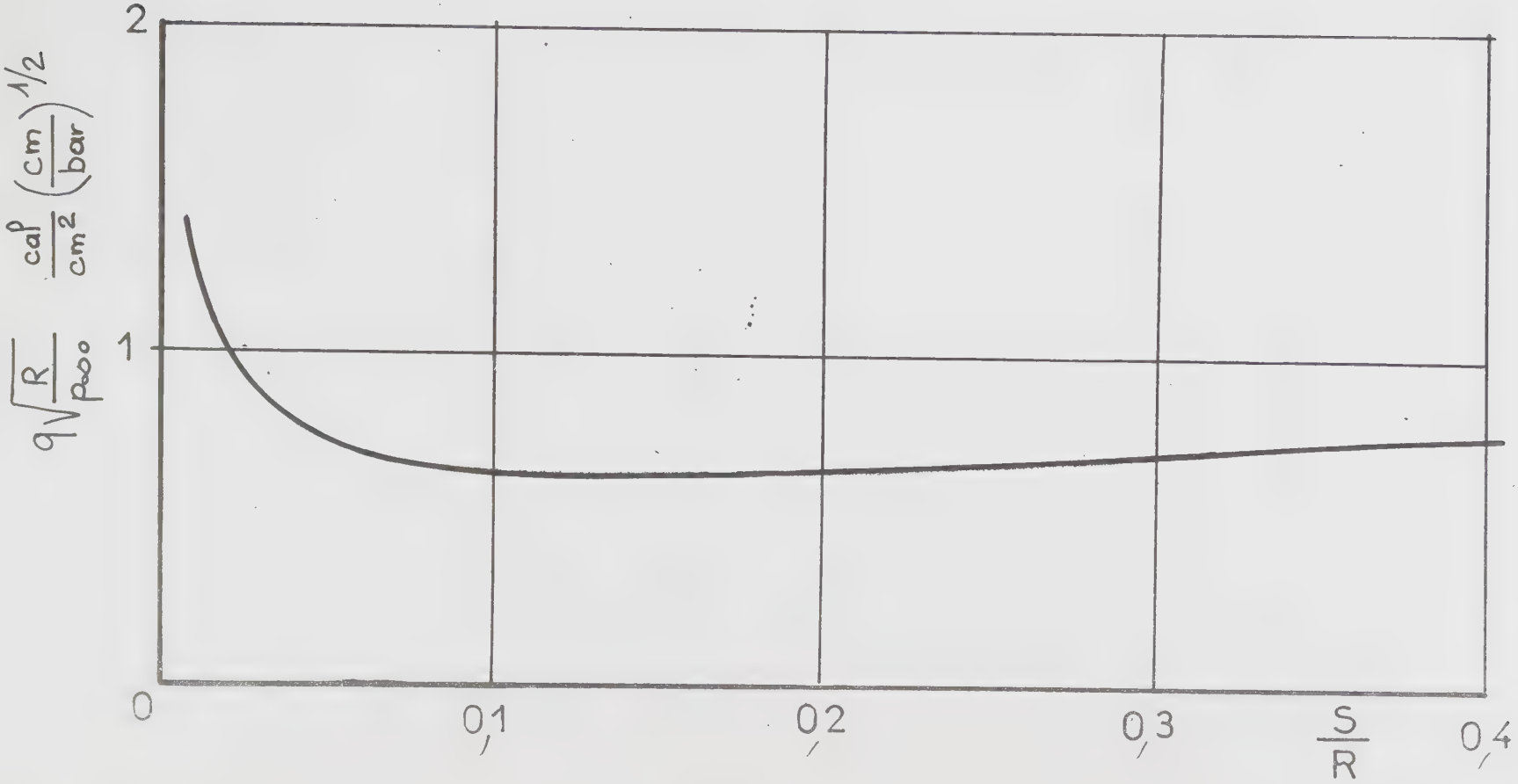
$T_{oe} = 1000°K$, $s_o = 44$ $R = 76,9$, $-0,92 \leqslant \beta^* \leqslant -0,09$
$T_{oe} = 2400°K$, $s_o = 3$, $R = 30$, $-0,126 \leqslant \beta^* \leqslant -0,1$
$T_{oe} = 4000°K$, $s_o = 10$, $R = 97$, $-0,163 \leqslant \beta^* \leqslant -0,1$

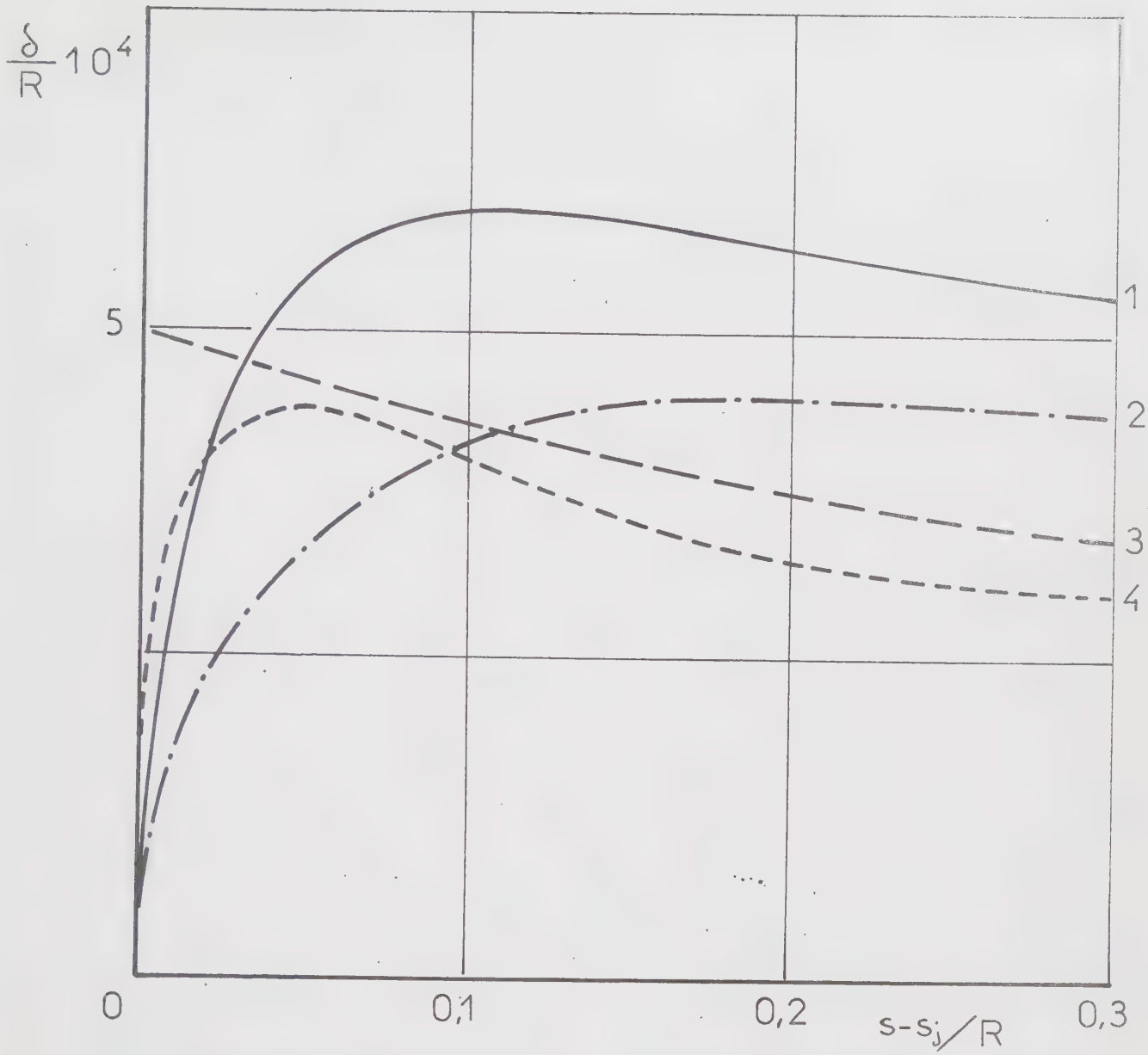



0
0,5
s/R
1
M∞ = 10
M∞ = 7
M∞ = 4
β*
- 0,1
- 0,2
- 0,3
β*ℓ (Teo = 300°K)
β*ℓ (Teo = 400°K)
blocage de la
couche de choc


$M_\infty = 4$
5
0
$q\sqrt{\frac{R}{P_\infty}}$ $\frac{cal}{cm^2}\left(\frac{cm}{bar}\right)^{1/2}$
$T_{\infty o}$ =600°K
$T_{\infty o}$ =400°K
0,1
0,2
0,3
S/R
0,4

$M_\infty = 7$ $T_{eo} = 600°\,K$

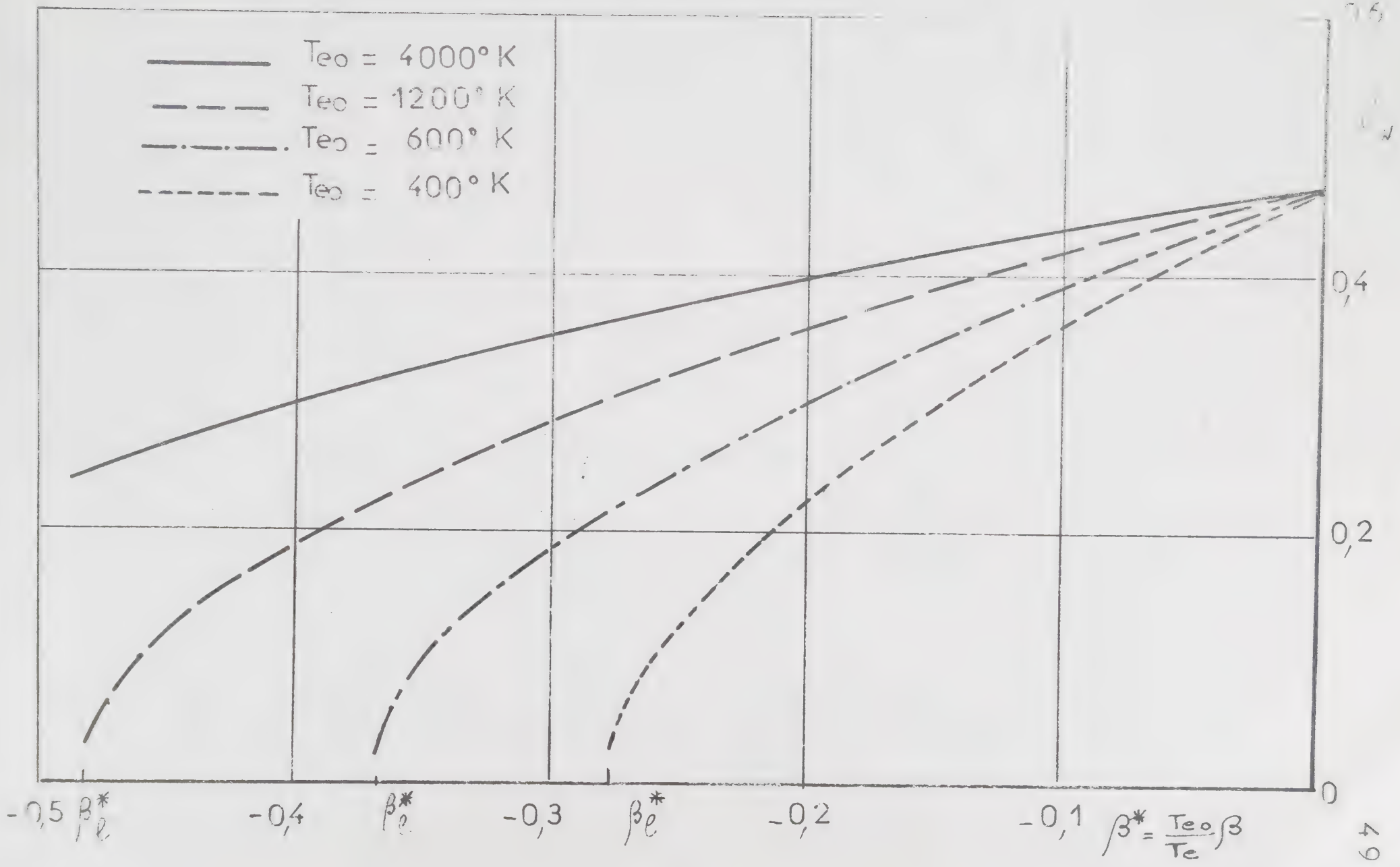


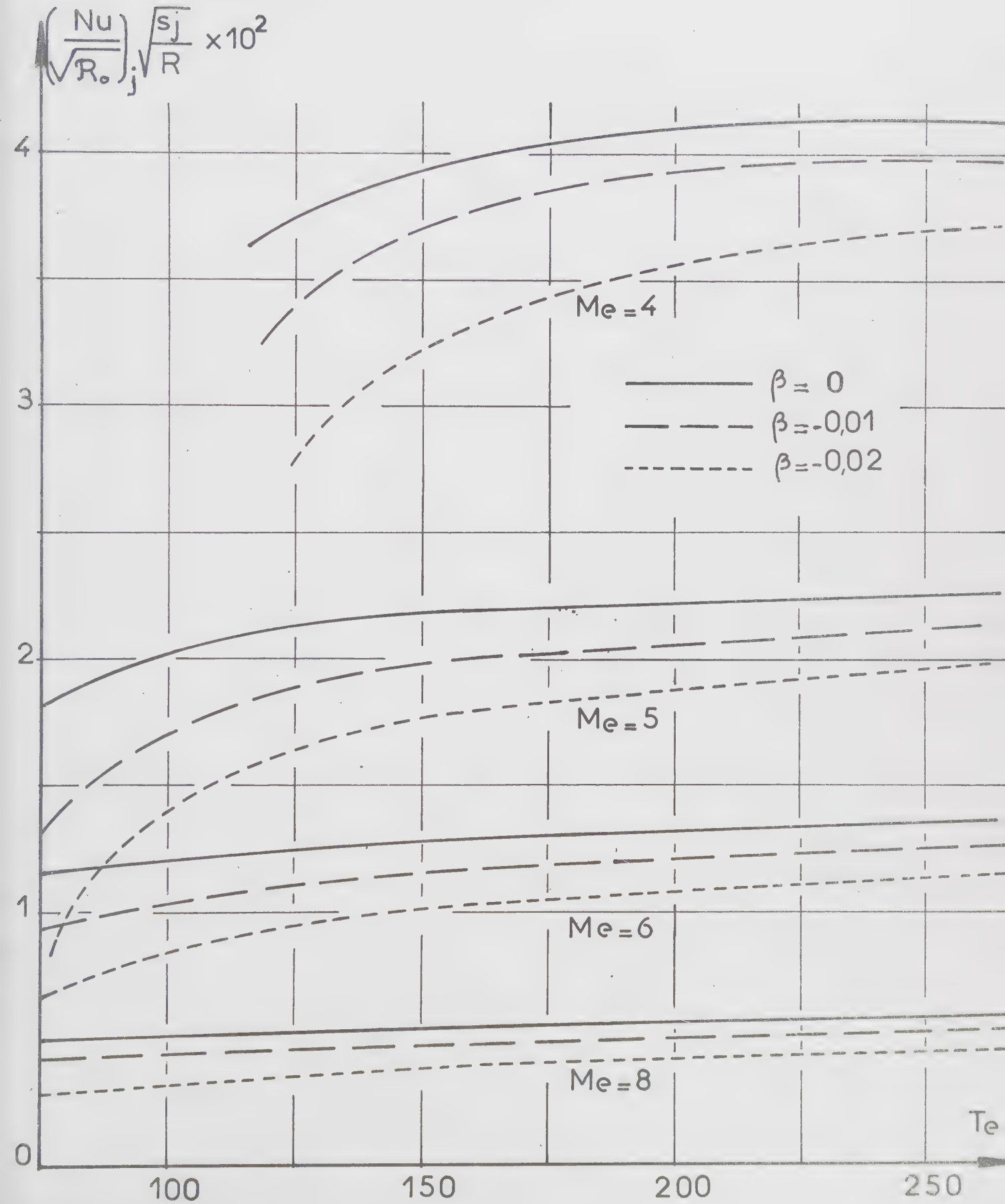


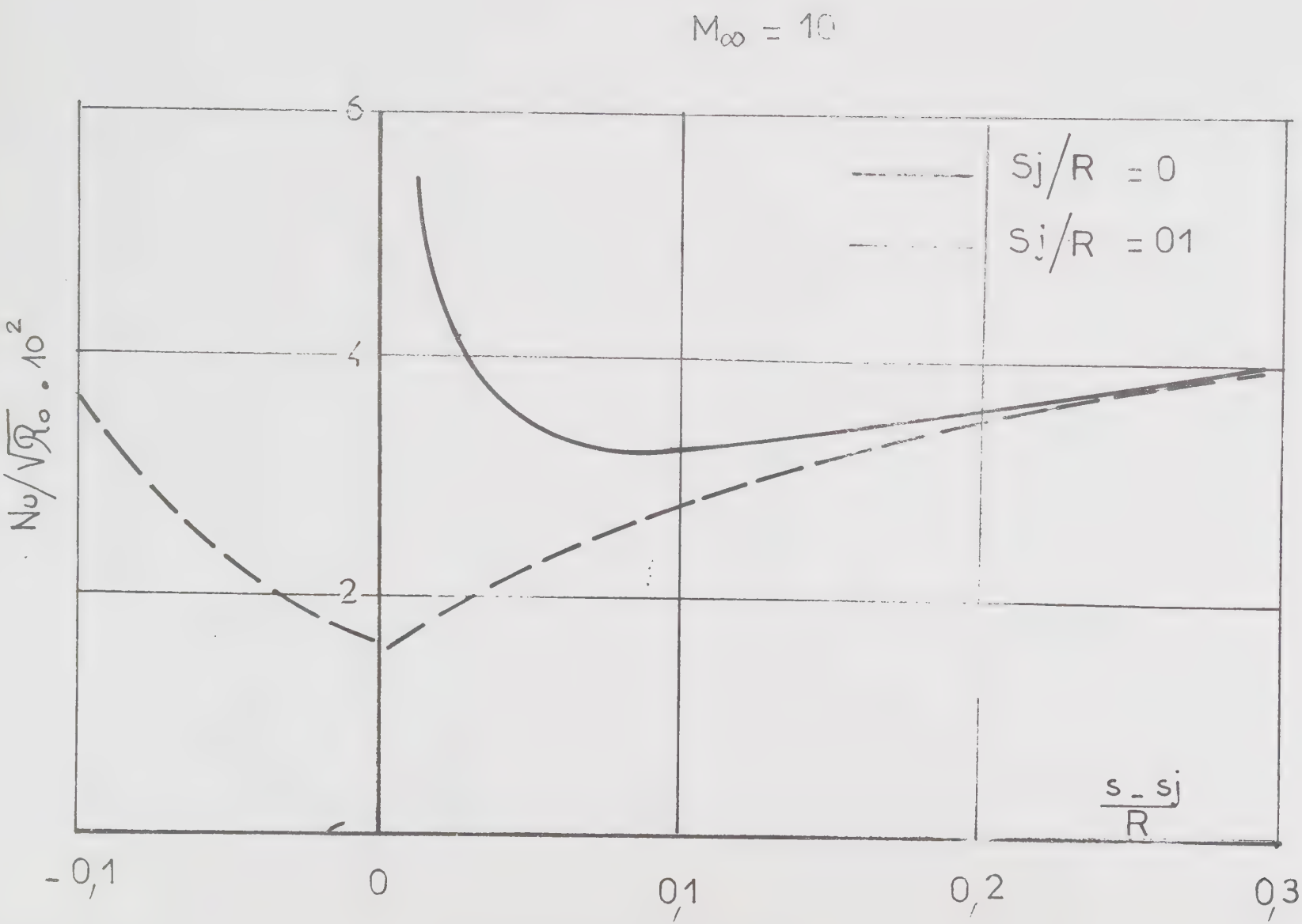
$\frac{\delta^*}{R}$ (1)

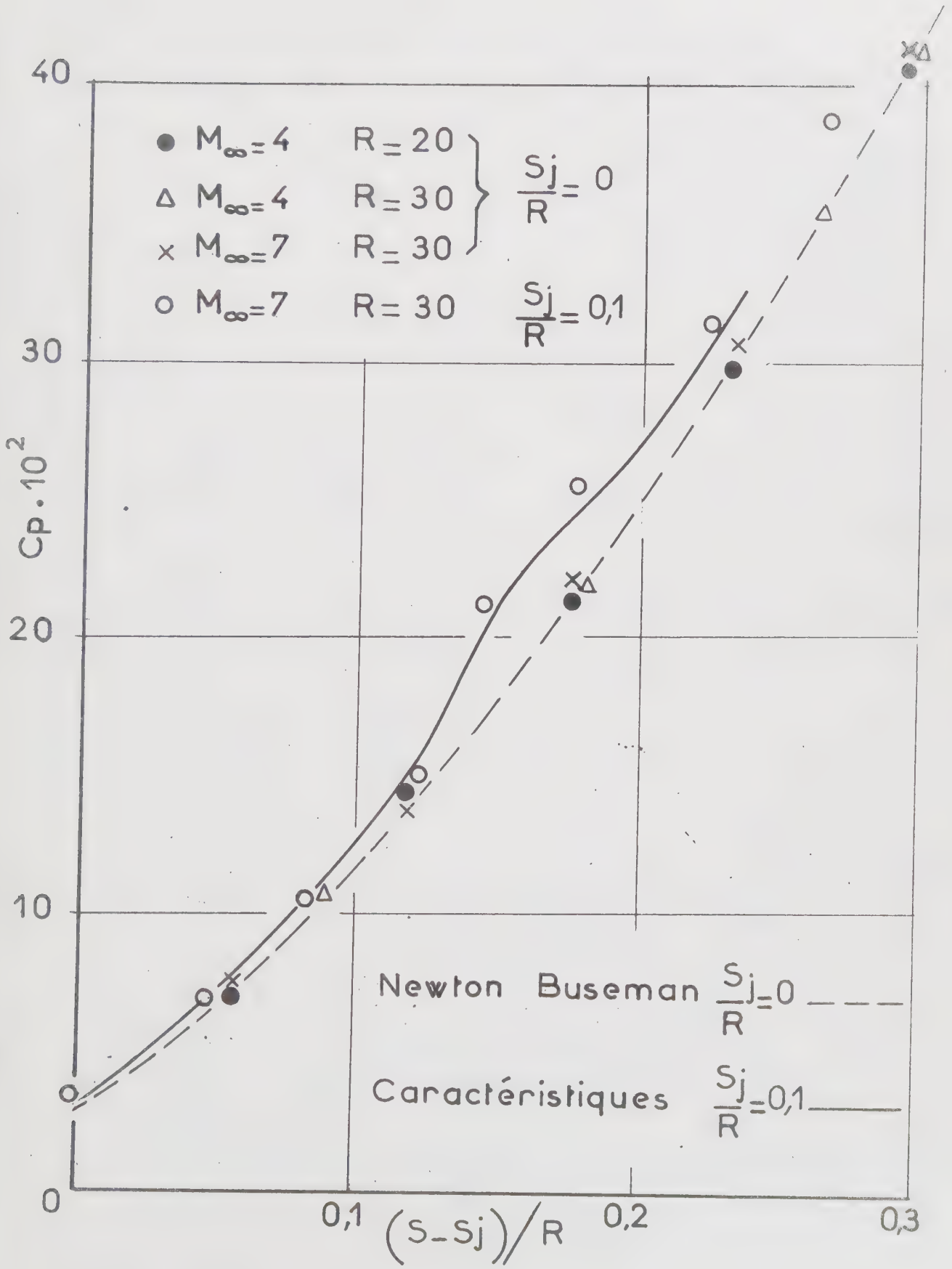
$(\mathcal{R}_e R)^{-1/2}$ (3)

$K\frac{s}{R}\left[\int_0^s \mathcal{R}_e\, ds\right]^{-1/2}\left[\frac{\partial p}{\partial y}\right]^{-m}$ $\begin{cases} m=\frac{1}{2} & (2) \\ m=1 & (4) \end{cases}$

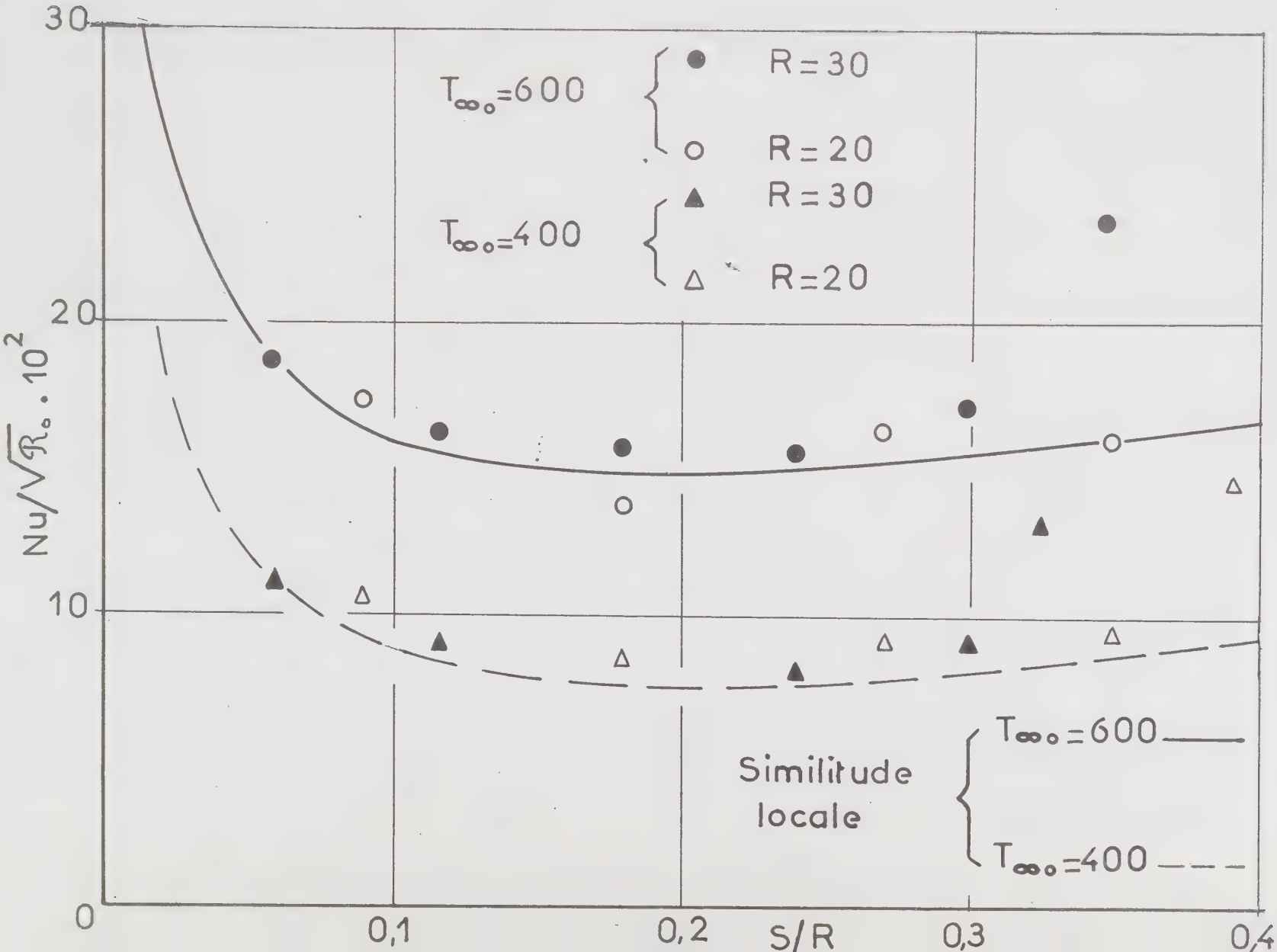

Teo = 4000° K
Teo = 1200° K
Teo = 600° K
Teo = 400° K
0,4
0,2
0
-0,5 β_e^*
-0,4
β_e^*
-0,3
β_e^*
-0,2
-0,1
$\beta^* = \frac{Teo}{Te}\beta$

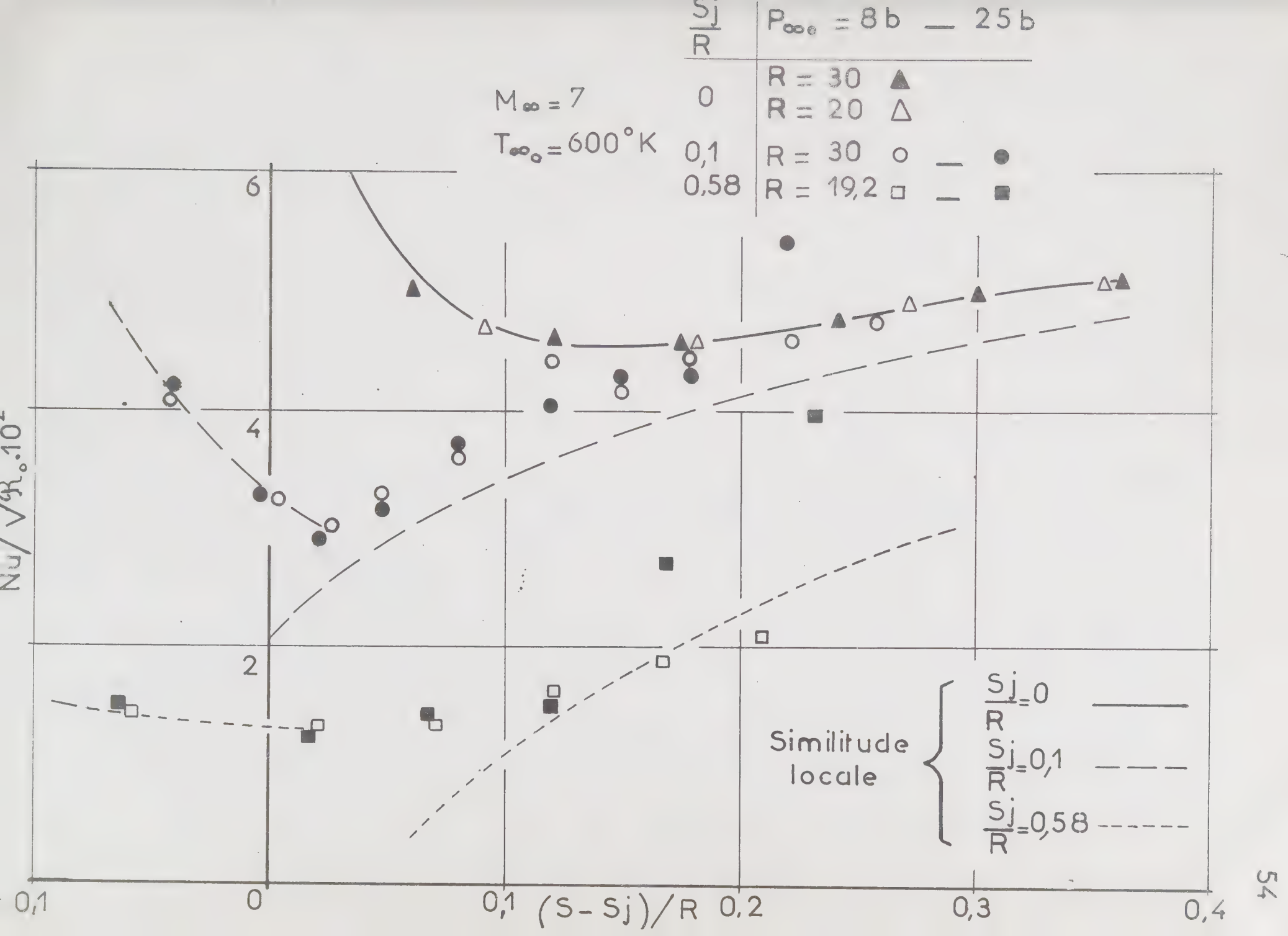

$\left(\frac{Nu}{\sqrt{R_o}}\right)_j \sqrt{\frac{s_j}{R}} \times 10^2$
4
3
2
1
0
Me = 4
Me = 5
Me = 6
Me = 8
β = 0
β = -0,01
β = -0,02
100
150
200
250
Te

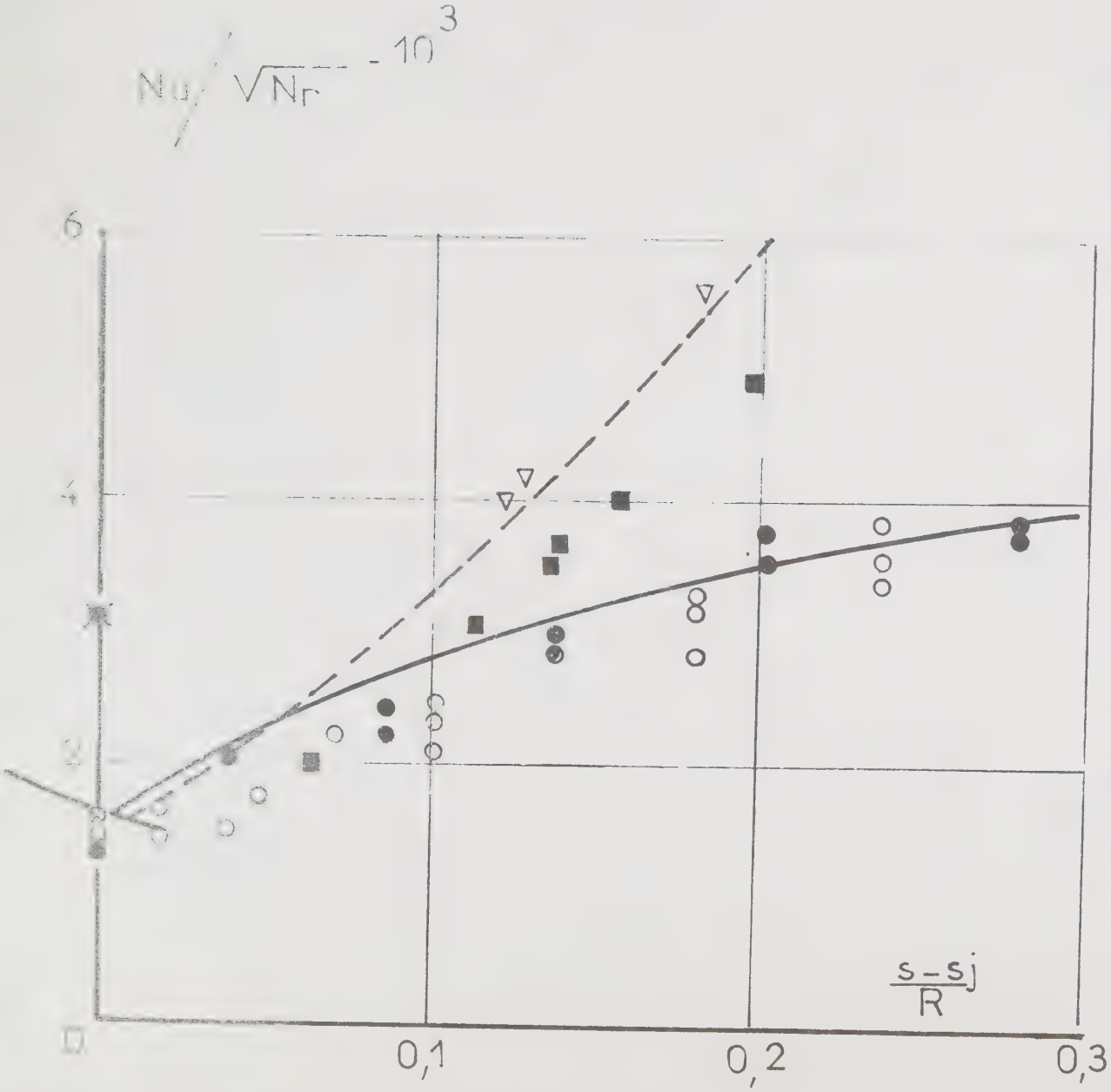

$M_\infty = 10$
6
4
2
$Nu/\sqrt{R_o} \cdot 10^2$
$S_j/R = 0$
$S_j/R = 01$
$\frac{s - s_j}{R}$
-0,1
0
0,1
0,2
0,3


40
30
20
10
0
Cp . 10²
● M∞=4 R=20
△ M∞=4 R=30
× M∞=7 R=30
○ M∞=7 R=30
Sj/R = 0
Sj/R = 0,1
Newton Buseman Sj/R=0
Caractéristiques Sj/R=0,1
0,1
0,2
0,3
(S-Sj)/R

$M_\infty = 4$ $\quad \frac{S_j}{R} = 0$




Sj/R
P∞₀ = 8 b — 25 b
M∞ = 7
T∞₀ = 600°K
0
R = 30
R = 20
0,1
R = 30
0,58
R = 19,2
Nu/√Re₀.10²
6
4
2
0,1
0
0,1
(S - Sj)/R
0,2
0,3
0,4
Similitude locale
Sj/R = 0
Sj/R = 0,1
Sj/R = 0,58



ories

IMF $Sj/R = 0,1$ ——
- ✖ Lester Lees
- ⊗ plaque plane

ZAKKAY $Sj/R = 0,58$ - - - - -

Expériences

IMF $Sj/R = 0,1$

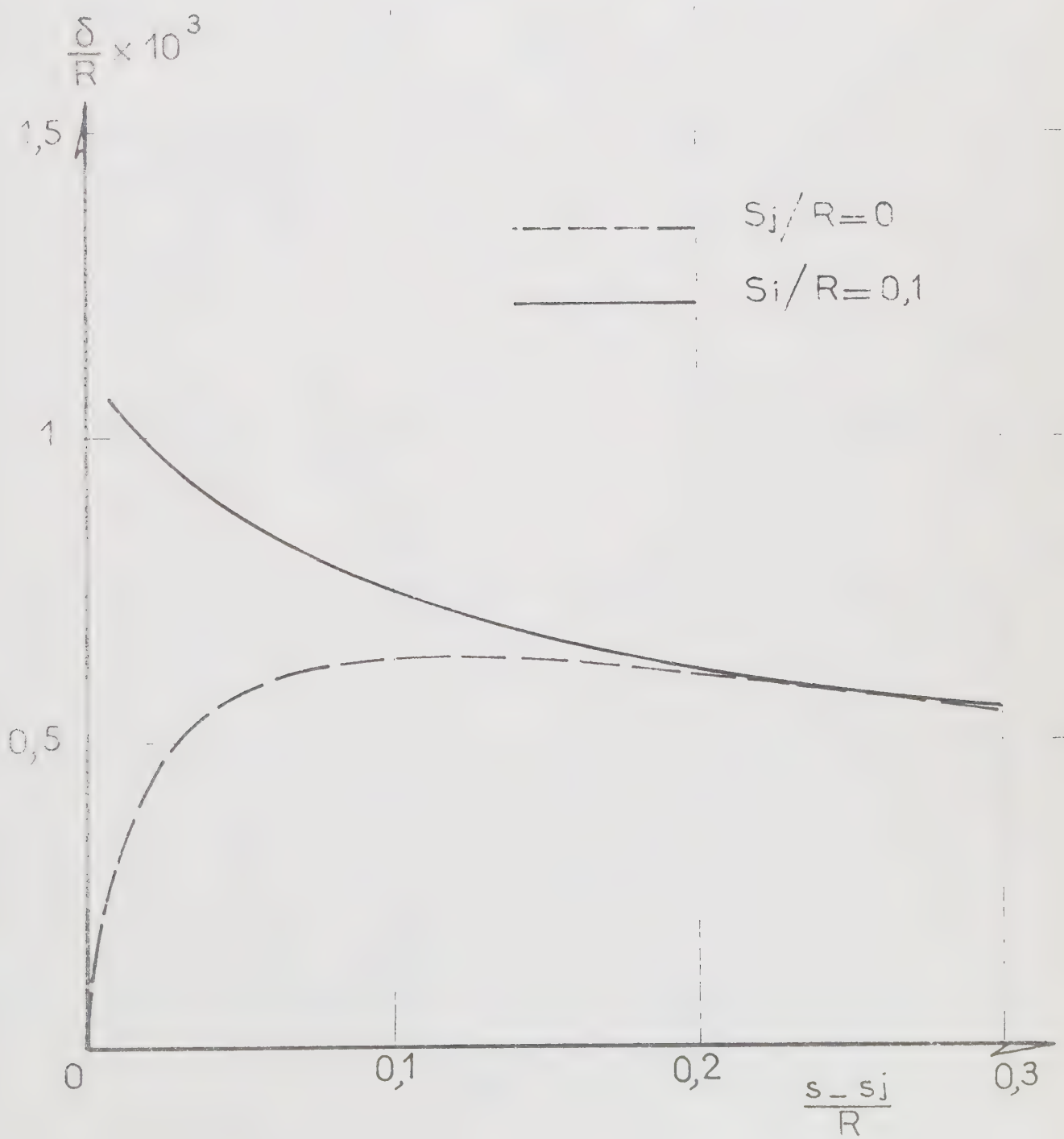
- ○ $P_{\infty o} = 184$ b , $T_{\infty o} = 4\,000°$ K
- ● $P_{\infty o} = 120$ b , $T_{\infty o} = 5200°$ K

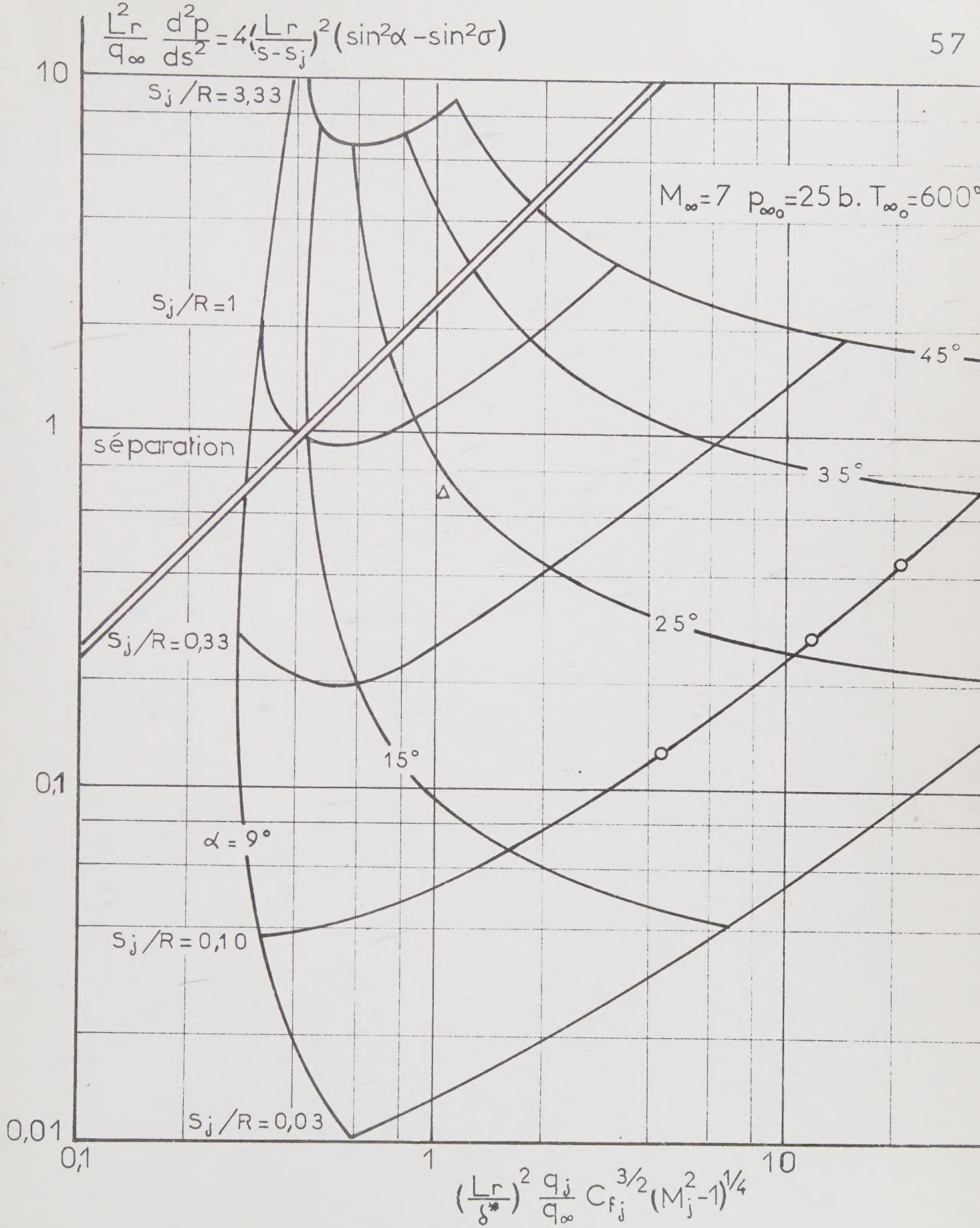
ZAKKAY $Sj/R = 0,58$

- ■ $P_{\infty} = 56$ b
- ▽ $P_{\infty} = 28$ b

$T_{\infty o} = 1000°$ K

$M_\infty = 7$; $P_{\infty_0} = 25$ b ; $T_{\infty_0} = 600°$ k




$\frac{L_r^2}{q_\infty}\frac{d^2p}{ds^2}=4\left(\frac{L_r}{s-s_j}\right)^2(\sin^2\alpha-\sin^2\sigma)$
$M_\infty=7$ $p_{\infty_0}=25$ b. $T_{\infty_0}=600°$
$s_j/R=3,33$
$s_j/R=1$
$s_j/R=0,33$
$s_j/R=0,10$
$s_j/R=0,03$
séparation
45°
35°
25°
15°
$\alpha=9°$
10
1
0,1
0,01
0,1
1
10
$\left(\frac{L_r}{\delta^*}\right)^2\frac{q_j}{q_\infty}C_{f_j}^{3/2}(M_j^2-1)^{1/4}$